

۱- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مکعب عدد فردی یک واحد اضافه کنیم، عدد زوجی به دست می آید. دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۲- با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n عدد $11^n - 1$ بر عدد ۱۰ بخش پذیر است. دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۳- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a+b}}$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۴- می دانیم $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ اعدادی گنگ هستند. نشان دهید عدد $\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ نیز عددی گنگ است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۵- ۵۰ ورزشکار مرد در رشته های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. ثابت کنید حداقل چند ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۶- به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

رابطه ی R روی مجموعه ی $\{0\} - R$ چنین تعریف شده است. (در این رابطه به ۲ سوال بعدی پاسخ دهید.)
 $xRy \Leftrightarrow xy > 0$

۷- ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است. دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۸- کلاس هم ارزی $[-2]$ را به دست آورید. دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۹- مجموعه های $A = \{3^x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2\}$ و $B = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}$ داده شده است. مجموعه های A و B را به صورت اعضا مشخص کنید.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۰- مجموعه های $A = \{3^x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2\}$ و $B = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}$ داده شده است. حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را تشکیل دهید و نمودار آن را رسم کنید.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۱- نمودار رابطه ی مقابل را رسم کنید.

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, |x - y| \geq 1\}$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۲- تعداد اعضای فضای نمونه ای.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۳- پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده ۸ شود.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴- پیشامد B که در آن حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۱۵ شود.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۵- پیشامد A - B

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۶- ۵ دانش آموز در نظر می گیریم. احتمال این که روز تولد هیچ دو نفری از آنها یک روز هفته نباشد را مشخص کنید.

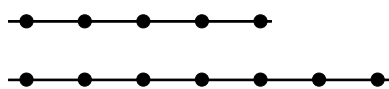
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۷- چهار دونه‌ی a و b و c و b در یک مسابقه شرکت می کنند. فرض کنیم احتمال برنده شدن a سه برابر احتمال برنده شدن b و احتمال برنده شدن b نصف احتمال برنده شدن c و دونده‌های c و b هم شانس باشند. احتمال برنده شدن a یا b را به دست آورید.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۸- دوازده نقطه مطابق شکل زیر روی دو خط موازی قرار دارند.

از این نقطه‌ها سه نقطه به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال این که سه نقطه رأس‌های یک مثلث باشند را، به دست آورید



دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۹- نقطه‌ای به تصادف درون مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی که طول هر ساق آن ۳ سانتی متر است، انتخاب می کنیم، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال آن که فاصله‌ی این نقطه از هر رأس مثلث بیش‌تر از ۱ سانتی متر باشد.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۲۰- قضیه: ثابت کنید اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ آن‌گاه

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۲۱- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۲۲- برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقراء ثابت کنید: $5^n - 4n - 1$ بر عدد ۱۶ بخش پذیر است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۲۳- می دانیم $\sqrt{5}$ گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عدد $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ نیز گنگ است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

۲۴- به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

۲۵- درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۲۶- اگر $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 10\}$

الف) عضوهای مجموعه‌ی $A^2 - B^2$ را مشخص کنید.

ب) $A^2 - B^2$ چند زیرمجموعه دارد؟

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۲۷- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A - (B \cap C \cap D) = (A - B) \cup (A - C) \cup (A - D)$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۲۸- تمام افرازه‌های مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۲۹- رابطه‌ی R در $Z^2 - \{(0,0)\}$ به صورت مقابل تعریف شده است:

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b^3} = \frac{c}{d^3}$$

الف) نشان دهید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

ب) کلاس هم‌ارزی $[(3, -1)]$ را تعیین کنید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۰- یک سکه را ۳ بار می‌اندازیم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای

ب) پیشامد A که در آن لااقل ۲ بار رو بیاید.

ج) پیشامد B که در آن هر سه بار سکه به یک طرف ظاهر شود.

د) پیشامد $A \Delta B$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۱- از بین ۴ کارمند ۲ تکنسین و ۳ کارگر، کمیته‌ای ۵ نفره تشکیل می‌دهیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) در کمیته کارگری وجود نداشته باشد.

ب) در کمیته حداکثر یک کارمند وجود داشته باشد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۲- از مجموعه‌ی اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۲ یا بر ۷ یا

بر هر دو بخش پذیر باشد، چقدر است؟

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۳- اگر $S = \{a, b, c, d\}$ و $P\{a, b, c\} = \frac{1}{4}$ و $P\{a, b, d\} = \frac{2}{3}$ آنگاه $P\{a, b\}$ را بدست آورید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۴- فرض کنیم دو قطعه چوب داریم که طول‌های آن‌ها به ترتیب ۱ و ۰/۵ متر باشد. قطعه‌ی بزرگ‌تر را با اره دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می‌شود. احتمال اینکه سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدهند، چقدر است؟

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۵- اگر A و B دو پیشامد فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۶- برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقراء ثابت کنید: $3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3(n^2 + n)}{2}$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۷- به روش استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد همواره فرد است.
دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۸- کدامیک از عبارت زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در صورت درست بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

(الف) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچک‌تر است.

(ب) حاصل ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۳۹- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر n مضربی از ۵ باشد، n نیز مضربی از ۵ است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۰- شخصی برای مهمانی خود ۳۹ نفر را دعوت کرده است. حداقل چند نفر در این مهمانی هستند که روز تولد آن‌ها یک روز هفته است؟

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۱- درستی تساوی زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۲- مقدار X و Y را طوری تعیین کنید که دو زوج مرتب $(15, X - Y)$ و $(X^2 - Y^2, 3)$ با هم برابر باشند.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۳- اگر $A = \{-2, -1, 0\}$ و $B = \{0, 1, 2\}$ دو مجموعه باشند:

(الف) $A \times B$ را مشخص کنید

(ب) نمودار مختصاتی $A \times B$ را رسم کنید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۴- نمودار رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x\}$ را رسم کنید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۵- رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی R^2 به صورت روبرو تعریف شده است: $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow b - d = 2(a - c)$ (الف) نشان دهید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.
(ب) کلاس هم‌ارزی $[(1, 2)]$ را تعیین کنید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۶- هر یک از اعداد زوج طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور قرعه برمی‌داریم. مطلوب است تعیین:
(الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.
(ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.
(پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت کوچک‌تر از ۶ باشد.
(ت) پیشامد $A' \cap B$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۷- از بین ۱۲ دانشجو می‌خواهیم به طور تصادفی ۴ نفر را برای تشکیل تیم کوهنوردی دانشگاه انتخاب می‌کنیم. اگر ۷ نفر از این دانشجویان در رشته‌ی فیزیک و ۵ نفر در رشته‌ی شیمی مشغول به تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آن که در این تیم:
(الف) فقط یک دانشجوی رشته‌ی فیزیک باشد.
(ب) حداقل ۳ نفر از آنها دانشجوی رشته‌ی فیزیک باشند.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۸- دو عدد حقیقی به طور تصادفی در فاصله‌ی $[0, 2]$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه مجموع دو عدد بین ۱ و ۲ باشد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۴۹- در یک شهرستان ۴ نفر کاندیدای انتخاب شهردار هستند. اگر بدانیم شانس انتخاب شدن A_1 دو برابر شانس انتخاب شدن A_2 و شانس انتخاب شدن A_2 دو برابر شانس انتخاب شدن A_4 است و با A_3 هم‌شانس باشند، احتمال این که A_1 انتخاب شود، چقدر است؟

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۰- فرض کنیم ۲۵٪ مردم یک شهر روزنامه الف و ۲۰٪ روزنامه‌ی ب و ۸٪ هر دو روزنامه را می‌خوانند. اگر شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود، احتمال این که هیچ‌یک از این روزنامه‌ها را نخواند، چقدر است؟
دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۱- با استفاده از اصل استقرا، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۲- با استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم، عدد حاصل ضرب ۶ می‌باشد.
دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۳- آیا حکم مقابل برقرار است؟ چرا؟ اگر $(a-1)(b-1) = 0$ آنگاه، $a = 1$ و $b = 1$ می‌باشد.
دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۴- دبیرستانی ۴۰۰ دانش آموز دارد. حداقل چند نفر وجود دارند که روز تولدشان در هفته یکسان است؟
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۵- می دانیم $\sqrt{7}$ عدد گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{3 + \sqrt{7}}$ عددی گنگ است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۶- مجموعه‌ی مقابل را به صورت گزاره‌نما بنویسید.
 $A = \{0, 3, 8, 15, 24, \dots\}$
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۷- به کمک جبر مجموعه‌ها، ثابت کنید:
 $(A - B') \cup B = B$
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۵۸- رابطه‌ی R در مجموعه‌ی R' به صورت مقابل تعریف می‌شود:
 $xRy \Leftrightarrow \sqrt{x} + y = \sqrt{y} + x$
ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^3 < 10\}$ و $B = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 1\}$ دو مجموعه باشند، به ۲ سؤال بعدی پاسخ دهید:

۵۹- مجموعه‌های A و B را به صورت اعضاء بنویسید.
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۰- مجموعه‌ی $B \times A$ را مشخص کنید.
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۱- x و y را چنان بیابید تا دو زوج مرتب $(x^2 - y^2, 8)$ و $(16, x + y)$ مساوی باشند.
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

هریک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۱۸ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور قرعه‌کارتی را برمی‌داریم. در ۴ سؤال بعدی مطلوب است تعیین:
۶۲- فضای نمونه‌ای.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۳- پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۴- پیشامد B که در آن عدد روی کارت مجذور کامل باشد.
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۵- پیشامد $A - B$.
دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۶- از یک سبد محتوی ۳ سیب فاسد و ۵ سیب سالم به تصادف ۲ سیب بیرون می‌آوریم. احتمال آن را بیابید که: هر دو سالم باشند.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۷- از یک سبد محتوی ۳ سیب فاسد و ۵ سیب سالم به تصادف ۲ سیب بیرون می‌آوریم. احتمال آن را بیابید که: هر دو از یک نوع نباشند.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۸- سه دونه‌ی a و b و c مسابقه می‌دهند. اگر شانس برنده شدن a سه برابر شانس برنده شدن b و شانس برنده شدن b نصف شانس برنده شدن c باشد، احتمال این که a برنده نشود، چه قدر است؟

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۶۹- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید:

$$p(A' \cap B') - p(A \cap B) = 1 - p(A) - p(B)$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۷۰- سکه‌ای به شعاع یک سانتی‌متر را داخل مربعی به ضلع ۵ سانتی‌متر می‌اندازیم. احتمال آن را بیابید که سکه کاملاً داخل مربع قرار گیرد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۷۱- تاسی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که سه بار عدد زوج بیاید، چه قدر است؟

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۶ - جبر و احتمال

۷۲- با استفاده از اصل استقراء ریاضی، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۷۳- عبارت زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی آن را بنویسید.

$$\text{اگر } x > 1 \text{ آن‌گاه داریم: } 4 - x^2 < 3$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۷۴- عبارت زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی آن را بنویسید.

مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۷۵- اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که:

$$a^2 + b^2 \geq -4(a + b + 2)$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۷۶- با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ است، $\sqrt{\sqrt{3} + 2}$ نیز عددی گنگ است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۷۷- هفت نقطه درون شش ضلعی منتظمی به طول ضلع ۱ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید فاصله‌ی دست کم دو تا از این نقطه‌ها از ۱ کم‌تر است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۷۸- با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$[A \cap (A - B)'] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۷۹- قضیه‌ی دو شرطی زیر را ثابت کنید:

$$A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۰- اگر $A_n = \left[\frac{-1}{n}, \frac{2n-1}{n} \right]$ باشد، ابتدا A_1 و A_2 را مشخص کرده سپس نمودار $A_1 \times A_2$ را رسم کنید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۱- ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۲- کلاس‌های هم‌ارزی آن را مشخص کنید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۳- تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این تجزیه‌ی تصادفی.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۴- پیشامد A که در آن حداقل سه بار رو بیاید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۵- پیشامد B که در آن فقط یک بار پشت بیاید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۶- پیشامد $A - B$ را بیابید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

می‌خواهیم یک تیم سه نفری از ۱۰ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی و ۶ دانش‌آموز در رشته‌ی ریاضی انتخاب کنیم، مطلوب است احتمال آن‌که:

۸۷- هر سه نفر رشته‌ی ریاضی باشند.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۸- دو نفر رشته‌ی تجربی و یک نفر رشته‌ی ریاضی باشند.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۸۹- تاسی به‌گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد اول، سه برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است، اگر در پرتاب این تاس A پیشامد وقوع عدد کوچک‌تر از ۴ باشد، احتمال وقوع پیشامد A را محاسبه کنید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۹۰- اگر X و Y دو عدد تصادفی از بازه‌ی حقیقی $[0, 2]$ باشند، احتمال آن را بیابید که داشته باشیم: $2 \leq Y + 2X \leq 4$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۹۱- تاس سالمی را ۸ بار می‌اندازیم، احتمال آن را حساب کنید که حداقل ۶ بار عددی فرد آمده باشد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۹۲- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند و داشته باشیم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ و } P(A) = \frac{1}{8} \text{ و } P(B) = \frac{1}{8} \text{ ، مطلوب است محاسبه‌ی } P(A' \cap B')$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۸ - جبر و احتمال

۹۳- استدلال ، روش نیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۹۴- هنگامی از استدلال استفاده می کنیم، که مطمئن هستیم، نتیجه مسئله همیشه درست است.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۹۵- احکامی که همیشه برقرار هستند را می نامند.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۹۶- مثال نقض، مثالی است که نشان می دهد نتیجه کلی است.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۹۷- با استفاده از اصل استقراء ریاضی، به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، ثابت کنید:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > n$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۹۸- اگر A یک زیرمجموعه ۲۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اعضای A را بر عدد ۲۶ تقسیم کنیم، نشان دهید که حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۲۶ هستند.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۹۹- با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید که $\sqrt{3}$ گنگ است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۰- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۱- نمودار رابطه زیر را رسم کنید:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| \leq 1\}$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۲- با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۳- ثابت کنید: $(A')' = A$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۴- اگر $A = [-5, 2]$ و $B = (-\infty, -1)$ ، نمودار حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۵- ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۶- کلاس هم‌ارزی $(1,2)$ را بیابید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

کیسه‌ای دارای ۴ مهره یکسان است که ۲ تا سفید و ۲ تا قرمز هستند، از این کیسه ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید:

۱۰۷- مطلوب است فضای نمونه مناسب برای ترکیب رنگ‌های مهره‌های خارج‌شده را بنویسید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۸- مطلوب است پیشامد A آنکه فقط یکی از مهره‌ها سفید باشد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۰۹- مطلوب است پیشامد B آنکه حداقل یکی از مهره‌ها قرمز باشد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۱۰- مطلوب است پیشامد $A \cup B'$ را بیابید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

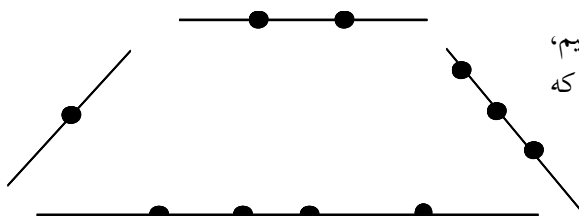
یک کارت از میان ۳۰ کارت که از ۱ تا ۳۰ شماره‌گذاری شده‌اند، به تصادف بیرون می‌آوریم، به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۱۱۱- احتمال آن را بیابید که عدد روی کارت مضرب ۲ یا ۳ باشد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۱۲- احتمال آن را بیابید که عدد روی کارت مضرب ۲ و ۳ باشد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال



۱۱۳- از میان ۱۰ نقطه مطابق شکل زیر، ۴ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن را بیابید که با این ۴ نقطه یک چهارضلعی ساخته شود که روی هر خط فقط یک رأس آن قرار بگیرد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۱۴- دانش‌آموزی به ۲۰ سؤال دوگزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد، احتمال آن را بیابید که به ۱۲ سؤال پاسخ درست داده باشد.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۱۵- تاسی به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج آن دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد آن است، اگر در پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچکتر یا مساوی ۳ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۱۶- برای دو پیشامد دلخواه A و B ، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۱۷- با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
توان سوم هر عدد حقیقی از توان دوم همان عدد بزرگتر است.
دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۱۸- با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
حاصلضرب هر دو عدد گویا همیشه عددی گویا است.
دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۱۹- با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
اگر $xy=0$ آنگاه $x=0$ و $y=0$.
دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۲۰- با استدلال استقراء ریاضی برای هر عدد طبیعی n ، درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۲۱- با استدلال برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{7}$ عدد گنگ و x عدد گویا است آنگاه $x + \sqrt{7}$ عددی گنگ است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۲۲- ۱۰ نقطه را درون مربعی به ضلع واحد انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه از آن‌ها کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۲۳- اگر x و y دو عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است.

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۲۴- ثابت کنید مجموعه تهی زیرمجموعه تمامی مجموعه‌ها است.

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۲۵- با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

$$126- \text{مطلوبست محاسبه } \bigcap_{i=1}^4 A_i \text{ ؟}$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

$$127- \text{مطلوبست محاسبه } \bigcup_{i=1}^4 A_i \text{ ؟}$$

دبیرستان و پیش‌دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۲۸- اعضای دو مجموعه A ، B را مشخص کرده و سپس اعضای $B \times A$ را محاسبه کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 15\} \quad \text{و} \quad B = \{3^k \mid |k| \leq 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

رابطه‌ی R در \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده است:

$$(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^2 + 5y = z^2 + 5t$$

به دو سؤال زیر پاسخ دهید:

۱۲۹- ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۳۰- کلاس هم‌ارزی $[(-1, 2)]$ را مشخص کنید.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

اگر A ، B ، C ، سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، برای دو قسمت زیر ابتدا یک عبارت مجموعه‌ای نوشته و سپس نمودار ون هر یک را رسم کنید.

۱۳۱- فقط پیشامد B رخ دهد.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۳۲- هر سه پیشامد با هم رخ دهند.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۳۳- مطلوبست پیشامد A آن که سکه رو یا تاس ۴ باشد.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۳۴- مطلوبست پیشامد B آن که سکه رو و تاس ۴ باشد.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

$$135- \text{در فضای نمونه‌ای } S = \{a, b\} \text{ اگر } \frac{p(a)}{p(b)} = \frac{1}{7} \text{ مطلوبست محاسبه: } A = \frac{3}{2}p(a) + \frac{1}{2}p(b)$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۳۶- ۴ نفر را انتخاب می‌کنیم، مطلوبست محاسبه احتمال آن که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها در یک روز هفته نباشد.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۳۷- در خانواده‌های ۵ فرزندی، مطلوبست محاسبه احتمال آن که ۲ فرزند پسر داشته باشند.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۳۸- یک نقطه بطور تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌کنیم، مطلوبست احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۳۹- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۹ - جبر و احتمال

۱۴۰- با استفاده از استدلال ثابت کنید ۳ برابر مربع یک عدد فرد منهای ۳، مضرب ۱۲ است.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴۱- به روش استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴۲- آیا مجموع دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است؟ چرا؟

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴۳- اگر $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ دو عدد گنگ باشند، ثابت کنید $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{7})$ نیز عددی گنگ است. (برهان خلف)

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴۴- هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ متر انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آن‌ها فاصله‌ای کم‌تر از $2\sqrt{2}$ متر را دارند.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴۵- ثابت کنید مجموعه تهی زیر مجموعه‌ی همه مجموعه‌هاست.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴۶- با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$A - (B \cup C) = (A - C) - B$$

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴۷- اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x = 8\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 4\}$ مفروض باشند، مجموعه $A^2 - B \times A$ را مشخص کنید.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۴۸- نمودار رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x \geq y^2, y \geq x^2\}$ را رسم کنید.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

فرض کنیم $A = \{1, 2, 3\}$ و رابطه R در A^2 به صورت زیر تعریف شده باشد:
 $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

۱۴۹- ثابت کنید R یک رابطه هم‌ارزی است.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۵۰- کلاس هم‌ارزی $\{(3, 1)\}$ را بیابید.

دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۵۱- یک تاس سالم را دوبار می‌اندازیم، مطلوب است تعیین:
 الف) پیشامد A آن که عدد ظاهر شده در پرتاب اول ۳ باشد.
 ب) پیشامد B آن که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب عددی اول باشد.
 ج) پیشامد C آن که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب یکسان باشد.
 د) پیشامد آن که C رخ دهد ولی B رخ ندهد.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۵۲- یک جعبه محتوی ۱۰ لیوان می‌باشد که ۴ عدد آن‌ها معیوب است، از این جعبه ۵ لیوان به تصادف برمی‌داریم، مطلوب است محاسبه:
 الف) احتمال آن که ۲ لیوان معیوب باشد.
 ب) احتمال آن که تمام لیوان‌ها سالم باشند.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۵۳- در یک کلاس، (احمد و علی و بهرام) داوطلب انتخاب نمایندگی کلاس می‌باشند، اگر احتمال انتخاب علی دو برابر احمد و احتمال انتخاب بهرام سه برابر علی باشد، احتمال انتخاب هر یک را بیابید.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۵۴- در یک آزمون ۱۵ سوالی که سوالات دارای پاسخ (بلی - خیر) می‌باشند، مطلوب است احتمال آن که فردی به ۳ سوال پاسخ (بلی) داده باشد.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۵۵- نقطه‌ای به تصادف از فضای نمونه‌ای $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, 1 \leq x + y \leq 3\}$ انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آنکه $x \leq 1$ و $y \leq 1$ باشد.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال

۱۵۶- اگر $p(A') = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = 2p(B)$ و $P(A' \cup B') = \frac{1}{4}$ باشد، مطلوب است محاسبه $p(B)$.
 دبیرستان و پیش دانشگاهی - سوالات امتحانات نهایی متوسطه - سوم دبیرستان - سوم ریاضی - سال ۸۷ - جبر و احتمال