

- ۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. زیرا اگر بگوییم: «خدا صاحب اختیاری است که تدبیر همه‌ی امور هستی به دست اوست» «پیام آیه‌ی شریفه‌ی «افرایتم ما تَحْرُثُونَ اَنْتُمْ تَزْرَعُونَهُ اَمْ نَحْنُ الزَّارِعُونَ» را ترسیم کرده‌ایم و اگر بگوییم: «جهان از اصل‌های متعدد پدید نیامده» پیام آیه‌ی شریفه‌ی «قُلْ اللّٰهُ خَالِقُ كُلِّ شَيْءٍ» را مد نظر قرار داده‌ایم.
- ۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. زیرا اگر می‌گوییم «خداوند تنها مبدأ و هستی‌بخش جهان است» به «توحید در خالقیت» اشاره کرده‌ایم و این‌که جهان از اصل‌های متعدد پدید نیامده است، به توحید در خالقیت تاکید کرده‌ایم که پیام آیه‌ی شریفه‌ی «اللّٰهُ خَالِقُ كُلِّ شَيْءٍ» و آیه‌ی شریفه‌ی «يَا أَيُّهَا النَّاسُ اَنْتُمْ الْفُقَرَاءُ اِلَى اللّٰهِ وَ اللّٰهُ هُوَ الْغَنِيُّ الْحَمِيدُ» به ترتیب حاکی از آن است.
- ۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. زیرا از دقت در آیه‌ی «قُلْ هُوَ اللّٰهُ اَحَدٌ» اصل توحید اتی - «خالق کل شیء» توحید در خالقیت، «واعبد رب» توحید عبادی ملی استنباط می‌گردد.
- ۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. زیرا اَفْتَاتِحَ حساب جداگانه‌ی مستقل برای عوامل تاثیرگذار در شفابخشی و گره‌گشایی و جز آن به معنای انحراف از توحید در «ربوبیت» است که دقت در پیام آیه‌ی شریفه‌ی «افرایتم ما تَحْرُمُونَ، اَنْتُمْ تَزْرَعُونَهُ اَمْ نَحْنُ الزَّارِعُونَ» به ثبات قدم موحد نیکو اعتقاد می‌انجامد.
- ۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. زیرا اگر گفته شود: «اعتقاد پیروان ادیان الهی به آن است که: وجود خدا وابسته به چیزی نیست» بر فهم پیام آیه‌ی شریفه‌ی «يَا أَيُّهَا النَّاسُ اَنْتُمْ الْفُقَرَاءُ اِلَى اللّٰهِ وَ اللّٰهُ هُوَ الْغَنِيُّ الْحَمِيدُ» را که نشان‌دهنده‌ی توحید در خالقیت است، صحّه گذاشته‌ایم.
- ۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. هر دو عبارت «یگانه بودن و شریک و هم‌تا نداشتن خداوند» و «یکتایی و حاکم بودن او بر همه چیز» صرفاً بیانگر اصل توحید است. چرا که در این عبارات هیچ اشاره‌ی مستقیمی به توحید در خالقیت نشده است. البته قسمت دوم و عبارت «حاکم» می‌توانست تعبیر به توحید در ولایت و شاید ربوبیت کند که در هیچ گزینه‌ای مطرح نشده است.
- ۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. زیرا ولات خداوند بر جهان، برخاسته از مالکیت حقیقی اوست که برای جز او مؤکول به قرار گرفتن در مسیر و مجرای ولایت الهی می‌باشد.
- ۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. زیرا یک انسان موحد را عقیده بر آن است که «همه‌ی مخلوقات، در کارهای خود نیازمند و وابسته به خداوند هستند اما خداوند در اداره‌ی جهان، به آن‌ها نیازی ندارد. این امر مربوط به توحید در ربوبیت از شاخه‌های توحید افعالی است و آیه‌ی شریفه‌ی «افرایتم ما تَحْرُثُونَ، اَنْتُمْ تَزْرَعُونَهُ اَمْ نَحْنُ الزَّارِعُونَ» نشان‌دهنده‌ی این معناست.
- ۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. زیرا اداره‌ی جهان و هدایت این مجموعه‌ی هدف‌مند به سوی مقصدی که برایش مقدر شده است، مرتبط با توحید در ربوبیت است که پیام آیه‌ی شریفه‌ی «افرایتم ما تَحْرُثُونَ اَنْتُمْ تَزْرَعُونَهُ اَمْ نَحْنُ الزَّارِعُونَ» حاکی از آن است.
- ۱۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. زیرا استمداد از حقیقت روحانی و ولایت معنوی پیامبر اکرم (ص) و دیگر معصومان (ع) به معنای دور شدن از مرز توحید در ربوبیت نیست. که فهم پیام آیه‌ی شریفه‌ی «افرایتم ما تَحْرُثُونَ» اَنْتُمْ تَزْرَعُونَهُ اَمْ نَحْنُ الزَّارِعُونَ» دستگیر ما در این داوری پر غوغاست.

۱۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. زیرا افتتاح حساب جداگانه ی مستقل برای عوامل تاثیرگذار در شفابخشی و گره گشایی و جز آن به معنای انحراف از توحید در «ربوبیت» است که دقت در پیام آیه ی شریفه ی «افریتم ما تحرمون، انثم تزرعونه ام تحنُّ الزارعون» به ثبات قدم موحد نیکو اعتقاد می انجامد.

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در آیه ی ۷۰ سوره ی اسراء دو عبارت: «حملناهم فی البر و البحر: سوار کردن انسان در خشکی و دریا» و «رزقناهم من الطیبات: روزی دادن به انسان از پاکیزه ها» آمده و هر دو مفهوم از کارهای خداوند در تدبیر و پرورش مخلوقات و اداره ی جهان توسط خدا می باشد. بنابراین اشاره به توحید در ربوبیت دارد. توحید در ربوبیت بدین معناست که خداوند، جهان را اداره می کند و به سوی مقصدی که برایش معین فرموده، هدایت می نماید و به پیش می برد.

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عبارت «لله ما فی السماوات و ما فی الارض» بیان گر مالکیت خداوند و عبارت: «الی الله ترجع الامور، همه ی امور به سوی خدا بازمی گردد» بیان گر بازگشت همه چیز به سوی خداوند است. چون خداوند مالک است، همه ی چیزها به سوی او باز می گردد. یعنی هر امری به مالک اصلی آن یعنی خدا باز می گردد. بنابراین مفهوم «علیت مالکیت خداوند و معلولیت بازگشت همه چیز به سوی خداوند» صحیح است.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. توصیه در ربوبیت، بدان معنا نیست که موجودات - به خصوص انسان - قدرت تدبیر ندارند، باغبانی که زحمت می کشد و به پرورش درختان اقدام می کند، رشد این درختان نتیجه ی تدبیر اوست. بلکه، توحید در ربوبیت بدین معناست که این باغبان و تدبیرش، همه از آن خدا و تحت تدبیر اویند.

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این که تصور کنیم دو یا چند خدا وجود دارد و هر کدام خالق بخشی از جهان هستند یا با همکاری یکدیگر، این جهان را آفریده اند، در واقع هر کدام از آنها را محدود و ناقص فرض نموده ایم، زیرا هر یک از خدایان باید کمالاتی را دارا باشد که دیگری آن کمالات را ندارد، و گرنه همگی عین هم دیگر می شوند و دیگر چند خدا نیستند. چنین خدایان ناقصی، نیازمند هستند و هر یک به خالق کامل و بی نیازی احتیاج دارد که نیاز او را برطرف نماید.

۱۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با فرض  $a = (a_1, a_2, a_3)$  داریم:

$$\begin{cases} |a| = 4 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 16 & (1) \\ |a_3| = 3 & (2) \end{cases}$$

از معادلات (۱) و (۲) داریم  $a_1^2 + a_2^2 = 7$ .

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{7}$$

طول تصویر قائم  $a$  بر روی صفحه‌ی  $xy$  برابر است با:

۱۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$|OA| = \sqrt{(a-1)^2 + a^2 + a^2} = 3 \Rightarrow 3a^2 - 2a + 1 = 9$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 2, -\frac{4}{3}$$

$$(الف) a = 2 \Rightarrow A = (1, 2, 2)$$

$$\Rightarrow \text{فاصله تا محور } x \text{ ها} = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$(ب) a = -\frac{4}{3} \Rightarrow A = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \text{فاصله تا محور } x \text{ ها} = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. بردارهای  $a+b$  و  $a-b$  هم اندازه هستند پس  $a \perp b$  می‌باشد.

$$\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{AO} + \vec{AB} + \vec{OB} = \vec{AB} + \vec{AB} = 2\vec{AB}$$

۱۹-

بنابراین گزینه ۴ پاسخ درست است.

۲۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$|\vec{e}_a| = 1, \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{3}{9} + m^2} = 1, m > 0 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_a = \sqrt{6} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, 1)$$

۲۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. گر  $O$  مبدأ مختصات باشد آن‌گاه مطابق فرض داریم:

$$\vec{AM} = 2\vec{MB} \Rightarrow (\vec{OM} - \vec{OA}) = 2(\vec{OB} - \vec{OM}) \Rightarrow 3\vec{OM} = \vec{OA} + 2\vec{OB}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + 2\vec{OB}) = \frac{1}{3}((1, -3, -1) + (2, 0, 4)) = \frac{1}{3}(3, -3, 3) = (1, -1, 1)$$

۲۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم قرینه‌ی نقطه‌ی  $A(x_1, y_1, z_1)$  نسبت به صفحه‌ی  $YZ$ ، نقطه‌ی  $(-x_1, y_1, z_1)$  و تصویر نقطه‌ی  $A$  روی صفحه‌ی  $XZ$ ، نقطه‌ی  $(x_1, 0, z_1)$  است. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 = m \\ x_1 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow m = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 5 \\ z_1 = n \end{array} \right\} \Rightarrow n = 5$$

$$\Rightarrow m + n = 2$$

۲۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر  $a'$  تصویر قائم بردار  $a$  روی امتداد بردار  $b$  باشد، آن‌گاه:

$$a'' = 2a' - a \Rightarrow a' = \frac{1}{2}(a'' + a) = \frac{1}{2}((-2, 3, -1) + (2, 1, -3)) \Rightarrow a' = (0, 2, -2)$$

$a'$  بردار هم‌راستا با بردار  $b$  است، پس طبق فرض داریم:

$$b = ma' = m(0, 2, -2), |b| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{m^2(0 + 4 + 4)} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} m = \frac{1}{2} \Rightarrow b = (0, 1, -1) \\ m = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = (0, -1, 1) \end{cases}$$

$$|\vec{2a}| - |\vec{3b}| = 2|\vec{a}| - 3|\vec{b}| = 2\sqrt{25} - 3\sqrt{100} = 10 - 30 = -20$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر  $(X, Y, Z)$  مختصات یک نقطه باشد، آن‌گاه مختصات قرینه‌ی آن نسبت به صفحه‌ی  $XOZ$  و محور  $X$ ها به ترتیب  $(X, -Y, Z)$  و  $(X, -Y, -Z)$  می‌باشد. بنابراین  $M(3, 4, -2)$  و  $N(3, 4, 2)$  بوده و نقطه‌ی وسط آن برابر است با:

$$P = \frac{M + N}{2} = (3, 4, 0)$$

$$|OP| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

در نتیجه:

۲۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. بردارهای  $a$  و  $b$  و  $c$  با هم مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازند پس زاویه‌ی بین  $a$  و  $b$  برابر  $120^\circ$  درجه است.

$$|\vec{2a} - \vec{3b}| = \sqrt{|\vec{2a}|^2 + |\vec{3b}|^2 - 2|\vec{2a}||\vec{3b}|\cos 120^\circ} = \sqrt{4 + 9 - 2(2)(3)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{19}$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ درست است.

$$\left. \begin{array}{l} A' \text{ تصویر } A \text{ روی } XOZ \\ A'' \text{ قرینه } A \text{ نسبت } YOZ \end{array} \right\} \Rightarrow A'A'' \text{ وسط } M \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow x_M + y_M + z_M = \frac{5}{2}$$

۲۸- می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع  $a$  برابر  $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  است.

$$AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$$

مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است، پس مساحت آن برابر است با:

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  
راه دوم: می‌توانیم از رابطه‌ی  $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$  نیز استفاده کنیم.

۲۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر بردار  $a$  به صورت  $a = (x, y, z)$  فرض شود، داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y^2 + z^2 = 14 \\ z^2 + x^2 = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2(x^2 + y^2 + z^2) = 36$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 18$$

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

بنابراین:

نکته‌ی درسی: طول تصویر قائم بردار  $a = (x, y, z)$  بر صفحه‌های  $xy$  و  $yz$  و  $xz$  به ترتیب  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ،  $\sqrt{y^2 + z^2}$  و  $\sqrt{x^2 + z^2}$  است.

۳۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که هر بردار ناصفر  $a$  را می‌توانیم به صورت  $a = |a| e_a$  نمایش دهیم که در آن  $e_a$  بردار جهت  $a$  است و طول آن برابر یک می‌باشد. پس باید داشته باشیم:

$$|e_a| = 1 \Rightarrow \frac{1}{k} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{مولفه‌ها مثبت اند.}} k = \sqrt{6}$$

$$a = d|a| e_a = \sqrt{6} \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = (1, \sqrt{3}, \sqrt{2})$$

۳۱- یک جدول سه تایی برای عدد سه رقمی در نظر گرفته و تعداد اعضای مجاز که در هر خانه می‌تواند قرار بگیرد را محاسبه نموده و ضرب می‌کنیم. چون عدد خواسته شده باید بزرگتر از ۳۰۰ باشد، اعداد ۰ و ۱ و ۲ نمی‌توانند در خانه اول قرار گیرند بنابراین در خانه اول ۳ عدد (۳، ۴، ۵) می‌توانند قرار گیرند. چون مجموعاً ۶ رقم داده شده و مجاز به تکرار اعداد نمی‌باشیم، پس در خانه دوم ۵ و در خانه سوم ۴ حالت مختلف می‌توان در نظر گرفت پس:

۳	۵	۴
---	---	---

بنابراین  $۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$  عدد می‌توان ساخت. پس گزینه ۲ صحیح است.

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با پنج حروف متمایز تعداد سه حرفی برابر است با  $۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$  و تعداد سه حرفی‌ها که دو حرف R در آنها باشد برابر است با  $۴ \times ۳ = ۱۲$  پس جمعاً تعداد سه حرفی‌های رمز عبور برابر است با  $۶۰ + ۱۲ = ۷۲$ .

۳۳- هر مثلث از انتخاب سه خط دلخواه از ۵ خط موجود ایجاد می‌شود پس تعداد جوابها برابر انتخاب ۳ خط از ۵ خط یعنی  $\binom{۵}{۳}$  می‌باشد پس داریم.  $\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!۲!} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$  یعنی گزینه ۱ صحیح است.

		ت ب ی
--	--	-------

$$۴ \times ۵ \times ۳ = ۶۰$$

۳۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ درست است.

توجه: «ی» در اول کلمه، حرف نقطه‌دار است.

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = ۱۳۲ \Rightarrow n = ۱۱ \Rightarrow \binom{۱۱}{۷} = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۳۳۰$$

۳۶- اگر جعبه‌ها را در یک ردیف فرض کنیم اولین مهره را به ۱۰ طریق می‌توان داخل جعبه‌ها قرار داد و دومین مهره را به ۹ طریق و سومین مهره را با ۸ طریق و الی آخر تعداد طرق ممکن برابر است با  $۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ = \frac{۱۰!}{۴!}$

پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

۳۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. نکته: تعداد جایگشت های  $n$  شیء که  $n_1$  تای آنها از نوع ۱،  $n_2$  تای آنها از نوع ۲، ... و  $n_k$  تای آنها از نوع  $k$  هستند (بدیهی است که باید:  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ )، برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

ابتدا دو حرف O را در کنار هم، یک شیء در نظر می گیریم که در این صورت، پنج شیء خواهیم داشت که دو تای آنها یکسانند (دو حرف N)، پس اگر پیشامد مطلوب را A بنامیم، با توجه به نکته بالا، داریم:

$$n(A) = \frac{5!}{2!}$$

از طرفی اگر هیچ شرطی اعمال نشود، شش حرف کلمه ی "KANOON" که دو حرف N و دو حرف O در آن یکسانند، با توجه به نکته بالا، به تعداد حالت های زیر جایگشت دارند:

$$n(S) = \frac{6!}{2! 2!}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر} : P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{5!}{2!}}{\frac{6!}{2! 2!}} = \frac{5! 2!}{6!} = \frac{5! 2!}{5! \times 6} = \frac{2!}{6} = \frac{1}{3}$$

۳۸- باید توجه داشت که اگر حرف «ی» در اول کلمه قرار گیرد، حرف نقطه دار خواهد بود. سه خانه خالی □ □ □ را در نظر بگیرید. در خانه اول یکی از حروف «م، ه، و، ر» می تواند قرار گیرد یعنی ۴ امکان. خانه دوم با یکی از ۵ حرف باقی مانده یعنی به ۵ طریق پر می شود و خانه سوم با یکی از ۴ حرف باقی مانده می تواند پر شود. بنابر قانون ضرب  $4 \times 5 \times 4 = 80$  حالت جمعاً وجود دارد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۳۹- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. حروف یکسان را در بسته می گذاریم و یکی می گیریم. بنابراین ۳ شیء داریم که تعداد جایگشت های آنها برابر است با:

$$\boxed{SS} \boxed{AA} L \Rightarrow 3! = 6$$

۴۰- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. نکته: تعداد جایگشت های  $n$  شیء که  $n_1$  تای آنها از نوع یک،  $n_2$  تای آنها از دو نوع

و  $n_k$  تای آنها از نوع  $k$  هستند، برابر با  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$  است.

$$3 \times 4! : \text{جایگشت ۵ عدد} \rightarrow \frac{3 \times 4!}{2! \times 2!} = 18$$

صفر اول نمی آید

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید توجه داشت که رقم سمت چپ نمی تواند صفر شود. با توجه به اینکه رقم ۴ سه بار تکرار شده:

۱ = تعداد اعداد سه رقمی شامل ۳ تا ۴

۵ = تعداد اعداد سه رقمی شامل دو عدد ۴  $\Rightarrow \binom{4}{1} 4, \binom{4}{2} 4, (144)$ : اعداد سه رقمی شامل دو تا ۴

۴ = تعداد اعداد سه رقمی شامل یک عدد ۴  $= 2 \times 2 \times 1 = 4$

بنابراین تعداد کل اعداد برابر با  $1 + 5 + 4 = 10$  می باشد.

$$\frac{۵}{\text{رقم اول}} \times \frac{۶}{\text{رقم دوم}} \times \frac{۳}{\text{رقم سوم}} = ۹۰$$

$$\begin{array}{l} ۱ یا ۲ یا ۳ \\ ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ \\ ۱ یا ۳ یا ۵ \end{array}$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$  پس  $\binom{۱۰}{۶} = \binom{۱۰}{۴}$  از طرفی طبق رابطه پاسکال  $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$  داریم:

$$\binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{۴} + \binom{۱۱}{۵} = \binom{۱۱}{۴} + \binom{۱۱}{۵} = \binom{۱۲}{۵}$$

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر فرض کنیم دو رقم زوج همیشه کنار هم هستند (یعنی دو رقم زوج را به هم می چسبانیم و یک رقم در نظر می گیریم تا همیشه کنار هم باشند). می توانیم آن ها را ۴ رقم در نظر بگیریم. پس داریم:

$$n(A) = ۲! \times ۴! = ۲ \times ۲۴ = ۴۸$$

جابه جایی دو رقم زوج با یک دیگر

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. واژه olympiad دارای ۸ حرف است که ۳ حرف o ، i و a صدا دارند. تعداد جای گشت های مورد نظر، که در آن جایگاه های اول، سوم و پنجم را با حروف صدادار پر کنیم، به صورت زیر به دست می آید:

۳	۵	۲	۴	۱	۳
↓	↓	↓			
صدادار	صدادار	صدادار			

از طرفی می توان جایگاه اول، سوم و پنجم را با حروف بی صدا پر کرد. پس تعددا کل جواب ها برابر است با:

$$۲ \times ۳! \times (۵ \times ۴ \times ۳) = ۳! \times (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲) = ۳! \times ۵! = ۶ \times ۵! = ۶!$$



۴۶- معادله مکان در حرکت با سرعت ثابت بصورت  $x = vt + x_0$  می باشد.

$$\begin{cases} t_1 = 2s \\ x_1 = 0m \end{cases} \Rightarrow 0 = 2v + x_0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} t_2 = 4s \\ x_2 = -6m \end{cases} \Rightarrow -6 = 4v + x_0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 2v + x_0 = 0 \\ 4v + x_0 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = -3(m/s) \\ x_0 = 6(m) \end{cases} \Rightarrow \text{معادله حرکت: } x = -3t + 6$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴۷- فرض کنیم سرعت قایق نسبت به آب  $V_1$  و سرعت آب (نسبت به زمین)  $V_2$  باشد. هنگامی که قایق برخلاف جهت جریان آب حرکت میکند، سرعت آن نسبت به زمین  $V_1 - V_2$  و هنگامی که در جهت جریان آب حرکت می کند  $V_1 + V_2$  است. اگر فرض کنیم  $\Delta S$  فاصله دو نقطه و  $\Delta t_1$  زمان پیمایش فاصله در حرکت به صورت هم جهت با جریان آب و  $\Delta t_2$  زمان پیمایش در حالت حرکت در خلاف جهت حرکت آب باشد:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S = (V_1 + V_2) \times \Delta t_1 \Rightarrow 2 = (V_1 + V_2) \times 0.2 \Rightarrow V_1 + V_2 = 10 \\ \Delta S = (V_1 - V_2) \times \Delta t_2 \Rightarrow 2 = (V_1 - V_2) \times 0.5 \Rightarrow V_1 - V_2 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

سرعت آب  $V_2 = 3 \text{ km/h}$  ، سرعت قایق نسبت به آب  $V_1 = 7 \text{ km/h}$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا لحظه ای که شتاب جسم صفر می شود را حساب می کنیم. به همین منظور دو بار از معادله ی مکان - زمان نسبت به زمان مشتق می گیریم تا معادله ی شتاب به دست آید و سپس آن را مساوی صفر قرار می دهیم و زمان را حساب می کنیم.

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow v = t^2 - 4t + 3$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = 2t - 4 \xrightarrow{a=0} 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

اکنون مکان جسم در لحظه ی  $t = 2s$  را به دست می آوریم.

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$$

$$\xrightarrow{t=2s} x = \frac{1}{3} \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2 \Rightarrow x = -9m$$

۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا با مشتق گرفتن از معادله‌ی مکان- زمان نسبت به زمان، معادله‌ی سرعت- زمان و سپس با مشتق‌گیری دوباره نسبت به زمان، معادله‌ی شتاب- زمان متحرک را در SI به دست می‌آوریم:

$$x = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1s$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1s$$

چون معادله‌ی سرعت- زمان در  $t = 1s$  دارای ریشه‌ی مضاعف می‌باشد و علامت سرعت عوض نشده است، نتیجه می‌گیریم که متحرک در لحظه‌ی  $t = 1s$  متوقف شده است ولی تغییر جهت نمی‌دهد و هم‌چنین در لحظه‌ی  $t = 1s$  شتاب متحرک صفر است.

۵۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. لحظه‌های تغییر جهت، همان لحظه‌های تغییر علامت سرعت است.

$$V = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 12t - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \\ t_2 = 3s \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2s$$

$$m_{AB} = \bar{V}_{t_1, t_2}$$

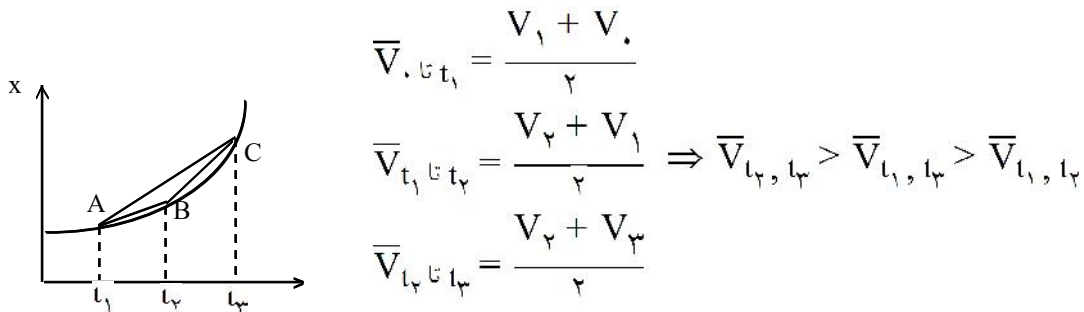
۵۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$m_{BC} = \bar{V}_{t_2, t_3}$$

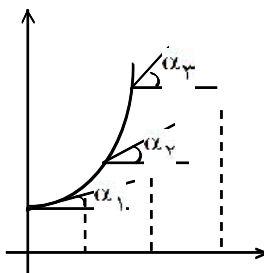
که شیب پاره‌خط BC از شیب دو پاره‌خط دیگر بیشتر است.

راه حل دوم: چون نمودار مکان جسم به صورت:  $m_{AC} = \bar{V}_{t_1, t_3}$  سهمی است، بنابراین حرکت با شتاب ثابت

می‌باشد، در نتیجه:



سرعت در هر لحظه شیب نمودار می‌باشد. مطابق شکل  $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$  می‌باشد، بنابراین در بازه‌ی  $t_2, t_3$  و  $t_1, t_2$  از دو گزینه‌ی دیگر بیشتر می‌باشد.



$$x = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 4t \rightarrow V = t^2 + 4t + 4$$

۵۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} V(t=3s) = 9 + 12 + 4 = 25 \text{ m/s} \\ V(t=1s) = 1 + 4 + 4 = 9 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{25 - 9}{3 - 1} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta x_1 = \frac{2}{5} \Delta x \quad \Delta x_2 = \frac{3}{5} \Delta x$$

$$V_1 = 20 \text{ m/s} \quad V_2 = 30 \text{ m/s}$$

$$\Delta t_1 \quad \Delta t_2$$

۵۳- با توجه به صورت مسئله، نوع حرکت متحرک در هر قسمت با سرعت ثابت بوده است. از طرفی، می دانیم که سرعت متوسط، حاصل تقسیم جابه جایی بر کل مدت جابه جایی است. بنابراین:

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x_1}{V_1} + \frac{\Delta x_2}{V_2}} = \frac{\Delta x}{\frac{\frac{2}{5} \Delta x}{20} + \frac{\frac{3}{5} \Delta x}{30}} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}} = 25 \text{ m/s}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵۴- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. قطار هنگامی از پل عبور کرده است که انتهای آن از روی پل گذشته باشد، یعنی جابه جایی قطار به اندازه طول قطار (l) و طول پل باشد. پس:

$$l + 100 = V \cdot t \Rightarrow l + 100 = 20 \times 12/5 = 250 \Rightarrow l = 150 \text{ m}$$

$$\left( \frac{72}{3/6} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

۵۵- با توجه به نمودار، سرعت اولیه حرکت، یعنی سرعت حرکت در لحظه  $t = 0 \text{ s}$  برابر خواهد بود با  $V_0 = -3 \text{ m/s}$  و

$$a = \frac{0 - (-3) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s}} = 1 \text{ m/s}^2$$

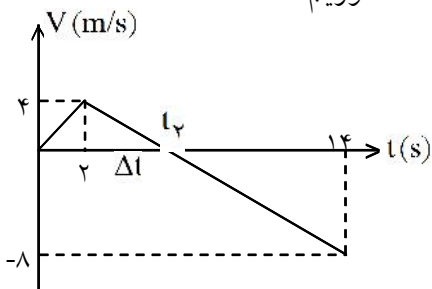
شتاب حرکت، یعنی شیب نمودار سرعت زمان برابر خواهد بود با:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + V_0 t \Rightarrow x = \frac{1}{2} t^2 - 3t$$

بنابراین خواهیم داشت:

بنابراین گزینه ی ۳ صحیح است.

۵۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. کافی است لحظه ای را که سرعت صفر می شود به دست آوریم.



$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{-8 - 4}{14 - 2} = \frac{-12}{12} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$V = a \Delta t + V_0 \Rightarrow -\Delta t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 2 + 4 = 6$$

متحرک از ثانیه ی ۶ تا ۱۴ خلاف جهت محور x حرکت کرده است، یعنی ۸ ثانیه.

۵۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{dx}{dt} = 8 - 2t = 0 \Rightarrow t = 4s$$

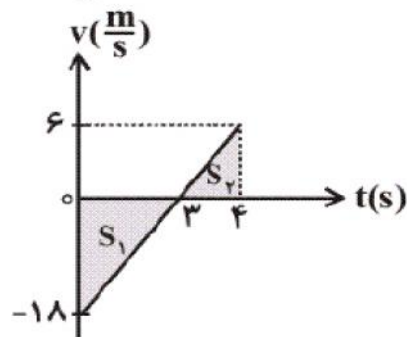
لحظه ی تغییر جهت متحرک

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 8(4) - 4^2 = 16m \\ t_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 8(8) - 8^2 = 0 \end{cases}$$

بنابراین متحرک از مبدأ مکان به مکان  $X = 16$  رفته و دوباره همین مسیر را برگشته است.  
یعنی: متر  $32 = 16 + 16 =$  مسافت پیموده شده

۵۸- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. معادله ی سرعت - زمان جسم برابر است با:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad x = 3t^2 - 18t + 10 \rightarrow v = 6t - 18$$



و لحظه ای که سرعت جسم برابر با  $6 \frac{m}{s}$  می شود، برابر است با:

$$6 = 6t - 18 \Rightarrow t = 4s$$

حال بررسی می کنیم که در چه لحظه ای متحرک تغییر جهت داده است:

$$v = 0 \rightarrow 0 = 6t - 18 \Rightarrow t = 3s$$

اکنون با استفاده از نمودار سرعت - زمان جسم برای بازه ی زمانی  $t = 0$  تا  $t = 4s$  می توان نوشت:

$$d = |S_1| + |S_2| = \frac{3 \times 18}{2} + \frac{6 \times 3}{2} = 30 \text{ m}$$

۵۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. معادله‌ی حرکت را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا لحظه‌های عبور از مبدأ مکان را به دست آوریم.

$$x = t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \\ t_2 = 2s \end{cases}$$

یعنی متحرک دو بار از مبدأ مکان عبور کرده، یکی در لحظه‌ی  $t_1 = 1s$  و بار دیگر در لحظه‌ی  $t_2 = 2s$  و برای یافتن سرعت در این لحظه‌ها از معادله‌ی سرعت استفاده می‌کنیم:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 3 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \\ \longrightarrow v_1 = 2(1) - 3 = -1 \frac{m}{s} \\ t_2 = 2s \\ \longrightarrow v_2 = 2(2) - 3 = 1 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}| = 1 \frac{m}{s}$$

$$x = \frac{4}{3t} + \frac{3}{2t^2} - t$$

۶۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 4t^2 + 3t - 1$$

ابتدا از معادله‌ی مکان نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

حال برای تعیین جهت حرکت جسم باید  $V_x$  را تعیین علامت کنیم، خواهیم داشت:

$$4t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1s \\ t = \frac{1}{4}s \end{cases}$$

واضح است که سرعت حرکت در بازه زمانی  $[\frac{1}{4}, 1]$  ثانیه منفی بوده و حرکت متحرک در این بازه در خلاف

جهت محور X ها است، پس متحرک  $\frac{1}{4}$  ثانیه در خلاف جهت محور X ها حرکت می‌کند.

$4t^2 + 3t - 1$	+	-	+
	+	-	+