

- ۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. پیامبر اکرم (ص) در حدیث منزلت فرمودند: «تو برای من به منزله‌ی هارون برای موسی هستی، جز این که بعد از من پیامبری نیست.» با توجه به انتهای حدیث که به مسأله‌ی «ختم نبوت» اشاره دارد، حدیث منزلت با آیه‌ی: «ما کان محمد ابا احد من رجالکم و لکن رسول الله و خاتم النبیین، محمد (ص) پدر هیچ‌یک از مردان شما نیست اما او فرستاده‌ی خدا و پایان پیامبران است»، تناسب مفهومی دارد.
- ۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جابر بن عبدالله انصاری می‌گوید: «در کنار خانه‌ی خدا و در حضور رسول خدا (ص) بودیم که حضرت علی (ع) وارد شد. رسول خدا (ص) فرمود: برادرم به سویتان آمد، پس رو به کعبه کرد و با دست به آن زد و فرمود: سوگند به خدایی که جانم در دست قدرت اوست، این مرد و کسانی که از او پیروی می‌کنند، رستگارند و در روز قیامت اهل نجاتند. سپس فرمود: این مرد اولین ایمان آورنده به خدا و ... و ارجمندترین شما نزد خدا است.» در همین هنگام این آیه بر پیامبر (ص) نازل شد.
- ۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در کتاب‌های حدیث اهل سنت، تأکید شده است که حضرت مهدی (عج) از نسل پیامبر اکرم (ص) و حضرت فاطمه (س) است، اما هنوز به دنیا نیامده است.
- ۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. امام خمینی (ره) فرمودند: «مجموعه‌ی قانون برای اصلاح جامعه کافی نیست.» برای این که قانون مایه‌ی اصلاح بشر شود، به قوه‌ی اجرائیه و مجری احتیاج دارد. بنابراین گزینه‌ی (۴) که می‌گوید: قانون اسلامی، مجری و دستگاه اجرا و اداره‌ی متناسب داشته باشد، پاسخ صحیح است.
- ۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به آیه‌ی (رسلا مبشّرین و منذرین لئلا یکون للناس علی الله حجّة بعد الرّسل) «رسولانی (را فرستاد که) بشارت و انذار دهند تا برای مردم در مقابل خداوند بعد از آمدن پیامبران، بهانه و دستاویزی نباشد» ناظر بر «مسدود بودن راه بهانه‌گیری انسان‌های دورافتاده از راه هدایت» است.
- ۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
- کسانی که زمان ظهور را پیش‌گویی می‌کنند، دروغ‌گویند: «کذب الوقاتون». پیامبر اکرم (ص) فرمودند: مثل ظهور حضرت مهدی (عج) مثل برپایی قیامت است، مهدی (عج) نمی‌آید مگر ناگهانی.
- ۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در آیه‌ی ۵۹ سوره‌ی مبارکه‌ی نساء خداوند می‌فرماید: ای کسانی که ایمان آورده‌اید اطاعت کنید از خدا و رسولش و اولیای امر خود پس هرگاه در امری دینی اختلاف نظر یافتید اگر به خدا و روز قیامت ایمان دارید آن‌را به کتاب خدا و سنت پیامبرش عرضه بدارید این بهتر و نیک فرجام‌تر است.
- ۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. پیامبر اکرم (ص) که با ایمان و استقامت بی‌مانند خود دعوت مردم به اسلام را پیش می‌برد و به پیروزی حق بر باطل یقین داشت، از همان ابتدای رسالت، به فرمان الهی، تلاش می‌کرد تا در موقعیت مختلف، حضرت علی (ع) را که در ایمان و عمل بی‌نظیر و معصوم از گناه بود، به مردم معرفی کند و ادامه راه را برای پس از خود مشخص سازد و مانع سرگردانی مردم شود.
- ۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قرآن کریم در آیات متعدد ضمن اشاره به میل جاهلی تمایل به فرمان بزرگان قوم به جای فرمان الهی، به مردم در خصوص آن هشدار می‌دهد. از جمله در آیه‌ی شریفه‌ی ۵۰ سوره‌ی مائده می‌فرماید: (آیا به دنبال حکم جاهلیت هستند؟ و چه کسی بهتر از خدا حکم می‌کند، برای مردمی که یقین دارند؟)

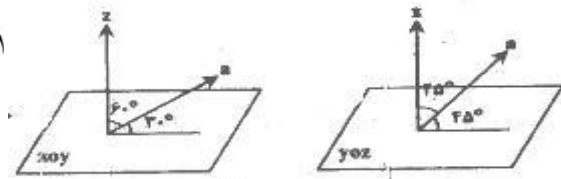
- ۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
چون مخلوقات جهان از خدا است، مالک اصلی و حقیقی آنها نیز خداوند است و در این مالکیت کسی شریک او نیست و در صورتی مالکیت انسانها بر دسترنج خود با مالکیت خداوند در تضاد قرار نمی‌گیرد که مالکیت انسان در طول مالکیت خدا باشد.
- ۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا این حدیق گهربار از امام صادق (ع) که می‌فرماید: «کونوا لنا زینا و لا تکونوا علینا شیئا» نشان‌دهنده‌ی این اس که شیعه‌ی با عمل، جایگاه تشیع را در جهان بالا می‌برد و شیعه‌ی بدون عمل، سبب تضعیف موقعیت تشیع می‌شود و این خود گناه بزرگی است.
- ۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ائمه‌ی اطهار (ع) راه‌هایی مسلمانان از دست حاکمان طاغوتی و مشکلات اجتماعی را آگاه شدن آنان می‌دانستند. از نظر آنها رشد و آگاهی مردم یک اصل اساسی بود و برای تحقق آن حتی از ایثار جان و مال خود دریغ نداشتند.
- ۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
اطاعت از رسول گرامی اسلام (ص) و جانشینان آن حضرت، لازمه توحید در عبادت است چون حکم و فرمان الهی از طریق این بزرگواران به مردم می‌رسد.
- ۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
بیت «نگار من که به مکتب نرفت و خط نوشت / به غمزه مساله‌آموز صد مدرس شد»، ناظر بر آیه شریفه «و ما کننّ ثلّو من قبله من کتاب و لا نخطه بيمينک إذا لاوتاب المبطلون» می‌باشد و بر معجزه بودن قرآن دلالت دارد.
- ۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. موجودات جهان، از آن جهت که خداوند متعال ویژگی و موقعیت آن را تعیین می‌کند مقدر به تقدیر الهی هستند که پیام آیه‌ی شریفه‌ی «لا الشمس یبغی لها ان تدرک القمر و لا اللیل سابق الثّهار و کل فی فلک یسبحون» حاکی از آن است.

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 45^\circ \\ \hat{\gamma} = 60^\circ \end{cases}$$

۱۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \cos^2 \beta + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\beta} = 60^\circ \\ \hat{\beta} = 120^\circ \end{cases}$$



۱۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} |a+b|^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 16 \\ |a-b|^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b = 4 \end{cases} \Rightarrow |a+b|^2 - |a-b|^2 = 4a \cdot b = 16 - 4 = 12 \Rightarrow a \cdot b = 3$$

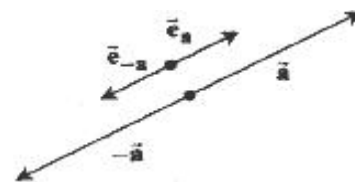
$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \vec{b} = \frac{-3 - 4 + 0}{(\sqrt{2})^2} (1, -1, 0) = \frac{7}{2} (-1, 1, 0)$$

۱۸- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 45^\circ$$

۱۹- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. بردارهایی که در یک راستا و یک جهت هستند، یک بردار جهت دارند و مطابق شکل:

$$\begin{cases} \vec{e}(ma) = \vec{e}_a : m > 0 \\ \vec{e}(ma) = -\vec{e}_a : m < 0 \end{cases}$$



$$\vec{e}(2a) = \vec{e}_a, \vec{e}(-b) = -\vec{e}_b, \vec{e}(3c) = \vec{e}_c \Rightarrow \begin{cases} |a| = 3 \\ |b| = 2 \\ |c| = 4 \end{cases}$$

$$|a| + 2|b| + 3|c| = 19$$

تذکر: اندازه ی بردار جهت هر برداری برابر ۱ است.

۲۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

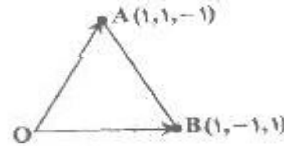
$$\begin{aligned} (\vec{a} + 2\vec{i}) \parallel (\vec{a} - 2\vec{i}) &\Rightarrow \vec{a} + 2\vec{i} = m(\vec{a} - 2\vec{i}) \Rightarrow (m-1)\vec{a} = (2+2m)\vec{i} \\ \Rightarrow \vec{a} &= \left(\frac{2+2m}{m-1}\right)\vec{i} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{i} \xrightarrow{|a|=1} \begin{cases} \vec{a} = (3, 0, 0) \\ \vec{a} = (-3, 0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

۲۱- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} A(3, -4, 2) &\rightarrow A'(1, -4, 2) \\ B(4, 5, -6) &\rightarrow B'(-4, -5, -6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{A'B'} = (-4, -5, -6) - (1, -4, 2) = (-5, -1, -8)$$

۲۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{AB} = (1, -1, 1) - (1, 1, -1) = (0, -2, 2)$$



$$\begin{cases} |OA| = \sqrt{3} \\ |OB| = \sqrt{3} \\ |AB| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$OAB \text{ محیط مثلث} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

نکته: فاصله‌ی دو نقطه‌ی (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) برابر است با:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

۲۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow a \cdot \vec{i} = a_1 \\ \vec{i} = (1, 0, 0) \end{cases}$$

و به همین ترتیب $a \cdot \vec{j} = a_2$ و $a \cdot \vec{k} = a_3$ ، پس:

$$(a \cdot \vec{i}) \vec{i} + (a \cdot \vec{j}) \vec{j} + (a \cdot \vec{k}) \vec{k} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = \vec{a} = (2, 3, -4)$$

۲۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$$

$$a \cdot c + c \cdot b = c \cdot (a + b) = c \cdot (-c) = -|c|^2 = -16$$

۲۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

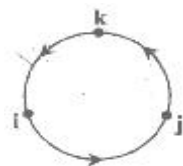
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \cos \beta = \frac{a_2}{|a|} = \frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \cos \beta > \cos \alpha > 0, \cos \gamma < 0 \\ \cos \gamma = \frac{a_3}{|a|} = \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{cases}$$

پس γ منفرجه و از بین دو زاویه‌ی حاده‌ی α و β ، $\alpha > \beta$ است (زیرا $\cos x$ در ربع اول نزولی است)، بنابراین:

$$\gamma > \alpha > \beta$$

۲۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned}$$



$$\text{عبارت} = \vec{i} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{k} + \underbrace{((\vec{j} \times \vec{i}) \cdot \vec{k})}_{-k} \vec{i} = \vec{k} - \vec{j} + \underbrace{((-k \cdot k))}_{-1} \vec{i} = \vec{k} - \vec{j} - \vec{i}$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

نکته:

۲۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}| \quad \begin{cases} \vec{OA} = (1, -1, 3) \\ \vec{OB} = (0, 2, 1) \end{cases}$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7, -1, 2)$$

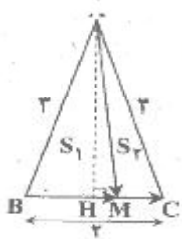
$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \sqrt{49 + 1 + 4} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{\sqrt{9 \times 6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

۲۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(|\vec{AM} \times \vec{BC}| = |\vec{AM} \times (\vec{BM} + \vec{MC})| = |\vec{AM} \times \vec{BM} + \vec{AM} \times \vec{MC}|) = 2S_1 + 2S_2 = 2S_{\triangle ABC}$$

بنابراین باید مساحت مثلث ABC را بیابیم، اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، داریم:

$$AH = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{2}$$

دقت کنید M هر نقطه ای روی قاعده باشد، حاصل عبارت $4\sqrt{2}$ خواهد بود.

نکته: در مثلث متساوی الساقین، میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده با هم برابرند.

۲۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. $(2a - b) \times (3a + 4b)$ با بردار $a \times b$ موازی است، زیرا هر دو بر صفحه ی شامل دو بردار a و b عمود هستند. بنابراین حاصل ضرب خارجی این بردار در $(a \times b)$ برابر بردار صفر است. نکته: حاصل ضرب خارجی دو بردار موازی، برابر بردار صفر است.

۳۰- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. چون قاعده های این متوازی السطوح بر بردارهای $i + j$, $j + k$, و $i + k$ بنا شده است، پس قاعده ها هم مساحت هستند. از آن جایی که $V = S \cdot h$ (حجم)، بنابراین اندازه ی تمام ارتفاع ها برابر است.

$$\left. \begin{aligned} \text{حجم } V &= |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \\ \text{یک قاعده } S &= |a \times b| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |(1, -1, 1)| = \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h = \frac{V}{S} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

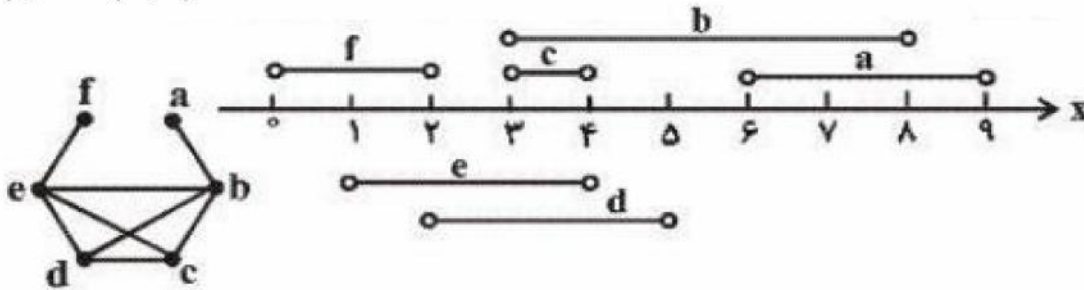
۳۱- هر یک از سه گزینه اول یک چهار ضلعی بدون قطر دارند. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$a = (6, 9), b = (3, 8)$$

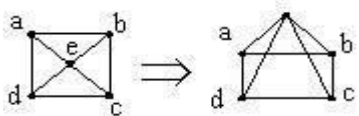
$$c = (3, 4), d = (2, 5)$$

$$e = (1, 4), f = (0, 2)$$



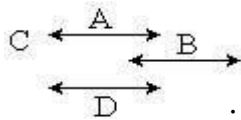
۳۳- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

اگر یک n ضلعی ($n \geq 4$) بدون قطر در داخل گراف ما وجود داشته باشد، گراف ما گراف بازه‌ها نمی‌باشد. در گزینه ۴ با تغییر مختصری در نمودار گراف خواهیم داشت:



همانطور که مشاهده می‌کنید، چهار ضلعی $abcd$ یک چهار ضلعی بدون قطر است.

نکته: یک n ضلعی بدون قطر گراف بازه‌ها نمی‌باشد. زیرا مثلاً برای $n = 4$ اگر بازه‌های A با B و C با D و B و C با D اشتراک داشته باشند نمی‌توانند بازه‌های A و D اشتراک نداشته باشند.



گزینه ی (۱) گراف کامل همواره گراف بازه‌هاست.

گزینه ی (۲) اگر یک یال از گراف کامل کم کنیم گراف حاصل هم حتماً گراف بازه‌ها خواهد بود.

۳۴- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. مطابق نمودار، شغل a_3 فقط به نفر b_3 می‌رسد و در نتیجه شغل a_1 به نفر b_1 و سپس شغل a_2 به نفر b_3 خواهد رسید. در آخر شغل a_4 باید به یکی از دو نفر b_4 یا b_5 سپرده شود. پس این شرکت در مجموع به دو طریق می‌تواند برای پست‌های خالی با شرط این که هیچ پستی خالی نماند و به هر نفر حداکثر یک پست برسد، کارمند استخدام کند.

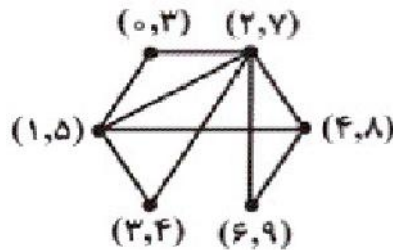
۳۵- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. تعداد گراف‌های ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ برابر است

$$\text{با } \binom{p}{2}.$$

چون در این گراف a و b تنها (ایزوله) هستند، پس این دو رأس را کنار می‌گذاریم. تعداد گراف‌های ساده‌ای که با ۴ رأس باقی‌مانده می‌توان ساخت، برابر است با:

$$64 = 2^6 \xrightarrow{\text{کل گراف}} 6 = \binom{4}{2} = \text{کل یال با ۴ رأس مانده}$$

۳۶- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. کافی است تا نمودار این گراف را رسم کنیم، که در آن رأس‌ها متناظر با بازه‌های موردنظر هستند.



۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته (ویژگی‌های دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده از مرتبه‌ی P): تعداد رئوس فرد، همیشه زوج است.

هیچ رأسی نمی‌تواند درجه‌ی بزرگ‌تر از $P-1$ داشته باشد، بنابراین حداقل دو جمله‌ی دنباله با هم مساوی‌اند. تعداد رئوس از درجه‌ی $P-1$ ، حداکثر به اندازه‌ی δ است. درجات صفر (رئوس ایزوله) در تشخیص بی‌تأثیرند، یعنی می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت. نکته (الگوریتم هاول-حکیمی):

ابتدا دنباله را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم، سپس بزرگ‌ترین عدد دنباله (Δ) را حذف می‌کنیم. از هریک از Δ رأس بعدی یک واحد حذف می‌کنیم (در واقع Δ یال از گراف حذف می‌کنیم). این فرآیند را می‌توان مجدداً روی دنباله‌ی حاصل تکرار کرد.

اگر دنباله‌ای که نهایتاً حاصل می‌شود، قابل رسم بود، دنباله‌ی اولیه هم قابل رسم است. در غیر این صورت قابل رسم نیست.

گزینه‌ی ۱: قابل رسم نیست، زیرا وقتی ۲ رأس از درجه‌ی $P-1$ داریم، δ باید حداقل ۲ باشد.

گزینه‌ی ۲: قابل رسم نیست، زیرا وقتی ۶ رأس داریم و یکی از آن‌ها از درجه‌ی صفر است، حداکثر درجه برابر ۴ است.

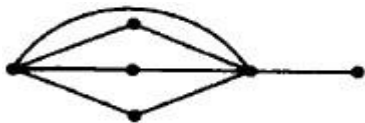
گزینه‌ی ۳ و ۴: با استفاده از الگوریتم هاول-حکیمی داریم:

حذف رأس درجه‌ی ۵

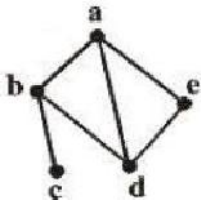
۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۱ \rightarrow ۳, ۲, ۱, ۰, ۰ غیر قابل رسم ✘

حذف رأس درجه‌ی ۵

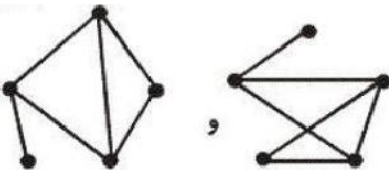
۵, ۴, ۲, ۲, ۲, ۱ \rightarrow ۳, ۱, ۱, ۱, ۰ قابل رسم ✔



۳۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نمودار گراف $G = (V, E)$ با مجموعه V و E موردنظر به صورت زیر است:



این نمودار همان نمودار گراف گزینه‌ی ۲ است، یعنی دو گراف زیر معادل‌اند. (به عنوان تمرین، این موضوع را نشان دهید.)



۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمترین تعداد یال گراف تهی است و حداکثر تعداد یال برای گراف کامل است.

$$0 \leq q \leq \binom{p}{2}$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $q = \frac{1}{2} \sum \deg(V_i) = \frac{1}{2} (4)(5) = 10$

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مجموعه‌ی یال‌های گراف موردنظر: $E \subseteq \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \dots, \{d, e\}\}$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\binom{2}{2}} \times \underbrace{\hspace{10em}}_{\binom{6}{1}} = 36$$

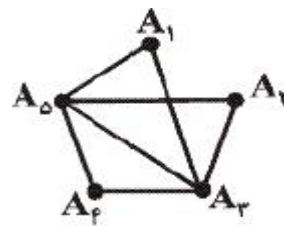
برای درجه‌ی ۲ شدن a

برای یال سوم

$$A_1 = (-1, 2), A_2 = (2, 4), A_3 = (-3, 6)$$

$$A_4 = (4, 8), A_5 = (-5, 10)$$

۴۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.



این گراف، ۷ یال دارد.

۴۳- نکته: اگر در گراف مرتبه‌ی p ، راس با درجه‌ی $p-1$ وجود داشته باشد، راس با درجه‌ی صفر وجود نخواهد داشت.

در گزینه ۱، پنج راس وجود دارد و تعداد یالهای یکی از رئوس برابر ۴ شده است، یعنی: پس راس

دارای تعداد یال صفر در گراف مذکور وجود ندارد. پس اعداد داده شده نمی‌توانند نشان‌دهنده‌ی تعداد یالهای رئوس یک گراف باشند. لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

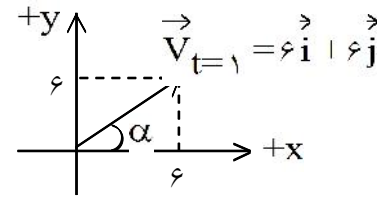
۴۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای شغل P ، فقط افراد a_1 و a_2 متقاضیند پس برای تصدی شغل P ، ۲ حالت وجود دارد.

برای شغل R ، فقط افراد a_4 و a_5 متقاضیند پس برای تصدی شغل R ، ۲ حالت وجود دارد.

برای شغل Q ، هر ۵ نفر متقاضیند ولی از آنجا که قبلاً دو نفر برای شغل‌های P و R انتخاب شده‌اند برای شغل Q تنها ۳ حالت باقی می‌ماند. طبق اصل ضرب، تعداد حالات برای تصاحب این سه شغل برابر است با: $2 \times 2 \times 3 = 12$

۴۵- در حالت کلی $n(V)$ تعداد راسها و $n(E)$ تعداد یالها را می‌رساند. با توجه به مجموعه V تعداد راسها ۵ و با توجه به مجموعه E تعداد یالها برابر ۴ است. لذا گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۶- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\vec{r} = (6t)\vec{i} + (-t^2 + 8t)\vec{j}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6\vec{i} + (-2t + 8)\vec{j} \rightarrow \vec{V}_{t=1} = 6\vec{i} + (-2 \times 1 + 8)\vec{j} = 6\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\tan a = \frac{V_y}{V_x} = \frac{6}{6} = 1 \rightarrow a = 45^\circ$$

۴۷- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-9 - 9(+12)}{21 - 0} = \frac{-21}{21} = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$V = at + v_0 \rightarrow \begin{cases} V_{T=6} = -1 \times 6 + 12 = 6 \frac{m}{s} \\ V_{T=12} = -1 \times 12 + 12 = 0 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Delta x = \bar{V} \times \Delta t \rightarrow (\Delta x) = \frac{V_{t_1} + V_{t_2}}{2} \times \Delta x = \frac{6 + 0}{2} \times (12 - 6) = 18m$$

(از t_1 تا t_2) ۱۲ تا ۶

۴۸- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{r} = (t^2 - 2t)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}t^3 - t^2\right)\vec{j} \rightarrow \vec{V} = (2t - 2)\vec{i} + (t^2 - 2t)\vec{j}$$

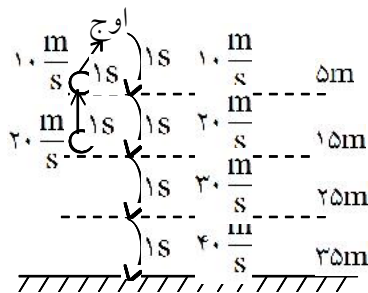
$$\vec{a} = 2\vec{i} + (2t - 2)\vec{j} \rightarrow 2t - 2 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$\vec{V}_{t=1} = (2 \times 1 - 2)\vec{i} + (1 - 2)\vec{j} \rightarrow \vec{V}_{t=1} = -\vec{j}$$

$$\vec{a}_{t=1} = 2\vec{i} \Rightarrow \text{زاویه ی بین } \vec{V}, \vec{a} \text{ در } t = 1 \text{ برابر } 90^\circ \text{ درجه است.}$$

شتاب هنگامی حداقل است که $a_y = 0$ باشد.

۴۹- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.



در حرکت پرتابی، سرعت قائم در هر لحظه همانند سرعت در راستای قائم (سقوط آزاد) است. پس در مجموع ۶ ثانیه طول می کشد تا به ۴۰ متری سطح زمین برسد.

۵۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. باید بزرگی برابند \vec{F}_1, \vec{F}_2 برابر $13N$ باشد ولی جهت آن در خلاف جهت \vec{F}_3 باشد. پس:

$$F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha = 13^2 \Rightarrow 25 + 144 + 2 \times 5 \times 12 \cos \alpha = 169$$

$$\Rightarrow 169 + 120 \cos \alpha = 169 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

۵۱- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. t را بر حسب x حساب کرده در معادله ی دوم قرار می دهیم.

$$x = 4t^2 - 16 \Rightarrow x + 16 = 4t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{x+16}{4} \Rightarrow y = 2\left(\frac{x+16}{4}\right) = \frac{2x}{4} + \frac{32}{4} \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 8$$

۵۲- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 6\vec{i} + a\vec{j} - (2\vec{i} + 2\vec{j}) = 4\vec{i} + (a-2)\vec{j}$$

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{i} + 2\vec{j} = \frac{4\vec{i} + (a-2)\vec{j}}{4} \Rightarrow \vec{i} + 2\vec{j} = \vec{i} + a - 2\vec{j} = 2 \Rightarrow a - 2 = 8 \Rightarrow a = 10$$

۵۳- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$V_x = 20 \frac{m}{s}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{V_x}{V} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{20}{V} \Rightarrow V = 40 \frac{m}{s}$$

۵۴- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. جهت حرکت در زمانی عوض می شود که علامت سرعت عوض شود.

$$V = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15, V = 0 \Rightarrow 3t^2 - 12t - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1s \\ t = 5s \end{cases}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12, a(5) = 6 \times 5 - 12 = 18 \frac{m}{s^2}$$

۵۵- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{y0}t \Rightarrow -80 = -5t^2 + 0 \Rightarrow t = 4s$$

$$\Delta x = V_x \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta x = 20 \times 4 = 80m$$

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{80^2 + 80^2} = 80\sqrt{2}m$$

۵۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$T_{\text{اوج}} = \frac{V \cdot y}{g} \Rightarrow 3 = \frac{V \cdot y}{g} \Rightarrow V \cdot y = 30 \frac{m}{s}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \Rightarrow 60^2 = 30^2 + V_x^2 \Rightarrow V_x = 30\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$$R = \frac{2V_y \cdot V_x}{g} = \frac{2 \times 30 \times 30\sqrt{3}}{10} = 180\sqrt{3}m$$

۵۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$r = ۱۰t^2 i + (-۵t^3 + ۱۵t)j \rightarrow \begin{cases} V = ۲۰ti + (-۱۵t^2 + ۱۵)j \\ a = ۲۰i + ۳۰tj \end{cases} \rightarrow a_{\min} = ۲۰ \rightarrow t = ۰$$

$$\xrightarrow{t=۰} \begin{cases} V = ۱۵j \\ a = ۲۰i \end{cases} \rightarrow \theta = ۹۰$$

۵۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(۱۰\vec{i} - ۱۶\vec{j}) - (-۶\vec{i} + ۴\vec{j})}{۴ - ۰} = ۴\vec{i} - ۵\vec{j}$$

۵۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$R = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{g} \Rightarrow ۸۰ = \frac{۸۰۰ \sin^2 \alpha}{۱۰} \Rightarrow \sin^2 \alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

$$H = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{۸۰۰ \times \frac{1}{2}}{۲۰} \text{ m} = ۲۰ \text{ m}$$

۶۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$H = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Rightarrow ۸۰ = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{۲۰} \Rightarrow V \sin \alpha = ۴۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{زمان رسیدن به نقطه اوج} = T = \frac{V \sin \alpha}{g} = \frac{۴۰}{۱۰} \text{ s} = ۴ \text{ s}$$

$$R = (V \cos \alpha) \times 2T \Rightarrow ۱۶۰ = (V \cos \alpha) ۸ \Rightarrow V \cos \alpha = ۲۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_x^2} = \sqrt{۴۰^2 + ۲۰^2} = ۲۰ \sqrt{۴ + ۱} = ۲۰ \sqrt{۵} \Rightarrow V = ۲۰ \sqrt{۵} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$