

- ۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آیهی شریفه‌ی «اللّٰه اعلم حیث یجعل رسالته» (خدا داناتر است که رسالت خود را بر عهده‌ی خود چه کسی بگذارد) بنابراین خداوند با توجه به ویژگی‌های خاص پیامبران آنها را به رسالت مبعوث فرموده‌اند.
- ۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حدیث شریف «علی مع القرآن مع علی» بیان‌گر همراهی همیشگی امیرالمؤمنین (ع) با قرآن می‌باشد که در میان گزینه‌ها حدیث ثقلین مبین این مفهوم است.
- ۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ویژگی‌ها و ارزش‌هایی که خداوند در وجود انسان قرار داده است، سبب تمایز بنیادین او از سایر موجودات می‌شود این ویژگی‌ها متناسب با هدف خلقت انسان، یعنی تقرب به خداوند به همه خوبی‌ها و زیبایی‌هاست، می‌باشد و در صدر آن ویژگی‌ها برخوردارگی از تعقل و تفکر است و لزوم توجه به وحی را عقل رقم می‌زند.
- ۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. رسول خدا (ص) با انجام وظایف عبودیت و بندگی به مرتبه‌ای از کمال نائل شد که می‌توانست واسطه‌ی فیض خالق به مخلوق شود. ولایت معنوی، برترین مقام رسالت است. طراح کنکور ولایت معنوی را قلمرو رسالت نام برده، در حالی که در کتاب درسی ولایت معنوی، مقام پیامبر (ص) است، نه قلمرو رسالت ایشان.
- ۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. پیامبران الهی زمانی می‌توانند مسئولیت خود را به درستی انجام دهند که تحت تاثیر هوای نفس قرار نگیرند و مرتکب گناه و اشتباه نگردند. و اگر پیامبری در هنگام اجرای فرمان‌های الهی معصوم نباشد، امکان دارد مردم با سرمشق قرار دادن او به گمراهی و انحراف مبتلا شوند.
- ۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آن جا که خداوند مالک حقیقی جهان است، بر آن ولایت نیز دارد. اگر خداوند به کسی اذن دهد، چنین اذنی به معنی واگذاری ولایت خداوند به دیگری نیست. بلکه بدین معناست که آن شخص، در مسیر و مجرای ولایت الهی قرار گرفته و از خودش استقلالی ندارد.
- ۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. توحید عبادی، ثمره و نتیجه‌ی ربوبی است. یعنی کسی لایق عبادت است که رب انسان باشد. بنابراین علیّت توحید ربوبی و معلولیت توحید عبادی درست است. آیه‌ی شریفه‌ی (اِنَّ اللّٰه ربّی و ربکم فاعبدوه هذا صراط مستقیم) حاکی از این رابطه‌ی علیّت است. تذکر: آیه‌ی شریفه‌ی (اتخذوا احبارهم و رهبانهم ارباباً من دون اللّٰه ... و ما امروا الا لیعبدوا) بیان‌گر شرک در ربوبیت است، نه توحید در ربوبیت و به همین جهت پاسخ درست نمی‌باشد.
- ۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. انسان، اندکی که از سطح زندگی روزمره و نیازهای طبیعی فراتر رود و در افق بالاتری بیندیشد، خود را با نیازهایی مهم‌تر روبه‌رو می‌بیند. این نیازها به تدریج به دل‌مشغولی، دغدغه و حتی درد متعالی تبدیل می‌گردند که قرار و آرام را از او می‌گیرند. بنابراین دل‌مشغولی‌ها و درد متعالی انسان، معلول نیازهای برتر است. این دغدغه و درد، نشانه‌ی بیداری و هوشیاری و ورود به وادی انسانیت است.
- ۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. قرآن کریم در آیه‌ی ۱۳ سوره‌ی مبارکه شوری می‌فرماید: شرع لکم من الدین ما وصی به نوحاً و الذی اوحینا الیک و ما وصینا به ابراهیم و موسی و عیسی ان اقیموا الدین و لا تتفرقوا فیه...» خداوند یک دین برای پیامبران تشریح کرده و از آنان خواسته که دین را برپا دارند و در آن تفرقه ایجاد نکنند.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق آیهی ۱۶۴ سورهی آل عمران، خداوند پس از بیان «اذ بعث فهیم رسولا من انفسهم...» می‌فرماید: «یتلوا علیهم آیاته و یزکیهم و یعلمهم الكتاب و الحکمة: آیات الهی را برایشان بخواند و تزکیه‌شان گرداند و کتاب و حکمت به آنان بیاموزد.»

۱۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. سخن امیرمؤمنان علی (ع) در رابطه با ولایت معنوی رسول خدا (ص) است. عامل برخوردارگی از این استعداد و لیاقت برای متعلم رسول خدا (ص)، عبودیت و بندگی و عامل برخوردارگی از این استعداد برای متعلم (حضرت علی (ع))، ایمان و عمل است.

۱۲- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. زیرا اگر از فرهنگ فطرت پسند اسلام، جویای مسدود بودن همیشگی راه ضلالت شویم پیام حدیث ثقلین «انی تارک فیکم الثقلین کتاب الله و عترتی اهل بیتی» وافی به این مقصود است یعنی در ادامه‌ی این حدیث آمده است که ما ان تمسکتم بهما لن تضلوا ابداً (تا وقتی که به این دو تمسک جوید هرگز گمراه نمی‌شوید).
۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

خداوند هر مخلوقی را برای هدفی حکیمانه آفریده است، پس هدایت یک اصل عام و همگانی در نظام خلقت است و آیه «قال ربنا الذی اَعْطى كُلَّ شَیْءٍ خَلْقَهُ ثُمَّ هَدى» مؤید آن می‌باشد.

۱۴- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. آیهی ولایت (اتما ولیکم الله و رسوله و الذین امنوا الین یقیمون الصلاة...) در هنگام رکوع حضرت علی (ع) و آیهی تطهیر (اتما یرید الله لیذهب عنکم الرجس اهل البیت و یطهرکم تطهیراً) در منزل ام سلمه و آیهی «یا ایها الرسول بلغ ما انزل الیک من ربک...» در روز غدیر بر پیامبر عظیم الشان اسلام (ص) نازل شد.

۱۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. از این آیه درمی‌یابیم که تغییر و تحوّل در امور مربوط به جامعه قوانین و سنت‌های خود را دارد که باید بدان توجه کرد. یکی از این قوانین این است که اقوام و ملت‌ها تغییر نکنند، خداوند نیز اوضاع و شرایط زندگی آنان را تغییر نخواهد داد.
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهی ۱: تصمیم درونی مردم، علت تغییر تصمیم الهی نیست، بلکه علت تغییر اوضاع و شرایط زندگی آنان است، زیرا تصمیم الهی با تصمیم انسان‌ها تغییر نمی‌کند.

گزینهی ۲: تحوّل درونی، موجب تغییر در یک جامعه نمی‌شود، بلکه تحوّل در اکثریت افراد یک جامعه، موج تغییر می‌گردد.

گزینهی ۴: در جامعه‌ای که گرفتار بی‌عدالتی و ظلم است، تصمیم یک فرد یا گروهی محدود برای برقراری عدالت، اگر از همراهی دیگر افراد برخوردار نباشد، به نتیجه نمی‌رسد.

۱۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(2a - b) \times (a + 2b) = \overbrace{2a \times a}^O + 2a \times b - b \times a - \overbrace{2b \times b}^O = 2(a \times b) = (7, -7, 14)$$

$$\Rightarrow a - b = (1, -1, 2)$$

$$|a \times b| = |a||b| \cdot \sin \theta \Rightarrow \sqrt{1+1+4} = 2\sqrt{2} \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta} = 60^\circ \\ \hat{\theta} = 120^\circ \end{cases}$$

۱۷- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\vec{a} = (2, -1, 0), \vec{b} = (1, 0, 3), \vec{c} = (1, 1, -4)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{b} - 2\vec{c} = (1, 0, 3) - (4, 2, -8) = (-1, -2, 11)$$

مؤلفه ی اول این بردار، -۱ است.

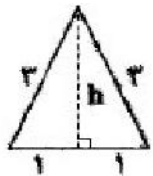
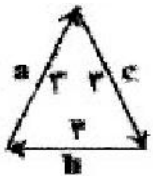
۱۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b) \cdot (a + b) = (-c) \cdot (-c)$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |c|^2 \Rightarrow 9 + 4 + 2a \cdot b = 9 \Rightarrow a \cdot b = -2 \Rightarrow |a \times b|$$

$$= |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 = 9 \times 4 - 4 = 32 \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

راه حل دیگر: نکته: مساحت مثلث نباشده بر بردارهای a و b عبارت است از: $S = \frac{1}{2}|a \times b|$



$$|a \times b| = 2S$$

$$h = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$

$$|a \times b| = 2S = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$$

۱۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} |a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = 20 & (1) \\ |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b = 28 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) - (2)} 2a \cdot b = 20 - 28 = -8$$

$$\Rightarrow a \cdot b = -2$$

۲۰- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

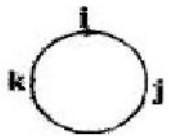
نکته: حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار a ، b و c ، عبارت است از:

$$V = |a \cdot (b \times c)|$$

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 4 \Rightarrow V = 6$$

راه حل دوم:

نکته:



$$\begin{cases} i \times j = k \\ j \times k = i \\ k \times i = j \end{cases}$$

$$V = |a \cdot c| = |(j - k) \cdot (2i + j) \times (4i - k)| = |(j - k) \cdot (-2i \times k + 4j \times i)| = |(j - k) \cdot (2j - 4k)|$$

$$= |2 + 4| = 6$$

$$\vec{a} = \left(\frac{a \cdot b}{|b|^2} \right) \vec{b}$$

۲۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تصویر بردار a بر بردار b عبارت است از:

$$\vec{a} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \vec{b} = \frac{10 - 7 + 4}{(\sqrt{4 + 1 + 16})^2} \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{1}{3} |\vec{b}|$$

۲۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. نکته ی ۱: $a \times b = -b \times a$

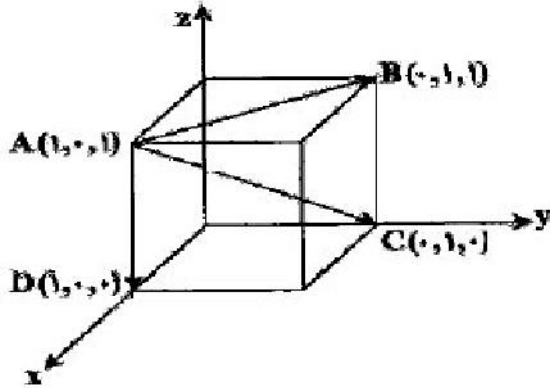
نکته ی ۲: $a \times (b \pm c) = (a \times b) \pm (a \times c)$

$$\begin{cases} a \times b = d \times c \\ a \times d = b \times c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times b = -c \times d \\ a \times d = -c \times b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times b + c \times d = 0 & (1) \\ a \times d + c \times b = 0 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) - (2)}$$

رابطه های (۱) و (۲) را از هم کم می کنیم:

$$\underline{a \times b} + \underline{c \times d} - \underline{a \times d} \sim \underline{c \times b} = 0 \Rightarrow a \times (b - d) - c \times (b - d) = 0 \Rightarrow (a - c) \times (b - d) = 0$$

۲۳- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول: با توجه به این که طول ضلع مکعب یک واحد است، مختصات رئوس مکعب را روی شکل مشخص می کنیم، سپس بردارهای \vec{AB} ، \vec{AC} و \vec{AD} را تشکیل می دهیم:



$$\begin{cases} \vec{AB} = (-1, 1, 0) \\ \vec{AC} = (-1, 1, -1) \\ \vec{AD} = (0, 0, -1) \end{cases}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{AD} = (1 + 1 + 0) + (0 + 0 + 1) = 3$$

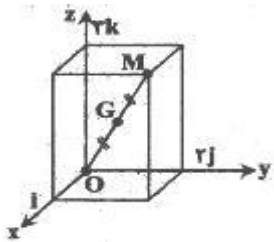
راه حل دوم: نکته: طول قطر مکعبی به ضلع a برابر $\sqrt{3}a$ است.

با توجه به شکل، واضح است که $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$. بنابراین:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{AD}) = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = |\vec{AC}|^2 = \frac{|\vec{AC}|}{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 3$$

۲۴- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{فاصله از محور } y \text{ ها: } \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \\ \text{فاصله از محور } z \text{ ها: } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$



۲۵- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. مرکز مکعب مستطیل (نقطه ی G) وسط قطر آن است:

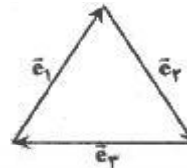
$$M(1, 2, 3) \Rightarrow G = \frac{O + M}{2} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$$

$$|OG| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

۲۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$



زاویه ی بین دو به دو این بردارها 120° است:

$$\left(3\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right) \cdot \left(\vec{e}_3 + 2\vec{e}_2\right) = 3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + 6\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 - 2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 8\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -6$$

۲۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a}'' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} - \vec{a} = 2 \times \left(\frac{1 + 12 - 1}{6} \right) \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a} = 2(1, 2, 1) - (1, 6, -1) = (3, 2, 5)$$

نکته: تصویر بردار \vec{a} روی بردار \vec{b} از رابطه‌ی $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ و قرینه‌ی آن نسبت به بردار \vec{b} از رابطه‌ی

$$\vec{a}'' = 2 \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} - \vec{a}$$

به دست می‌آید.

۲۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. طبق نامساوی کشی - شوارتس داریم:

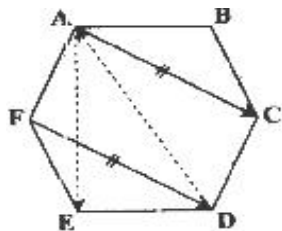
$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \sqrt{3}x \\ y \rightarrow 2y \end{cases} : (\sqrt{3}ax + 2by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(3x^2 + 4y^2 + z^2)$$

$$(a, b, c) = (\sqrt{3}, 1, -1)$$

$$(3x + 2y - z)^2 \leq (3 + 1 + 1) \underbrace{(3x^2 + 4y^2 + z^2)}_{20} = 100 \Rightarrow \max(3x + 2y - z) = 10$$

۲۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\text{عبارت} = \vec{AC} + \underbrace{\vec{AE} + \vec{DA}}_{\vec{DE}} + \vec{BF}$$

$$\vec{AC} = \vec{FD}$$

$$\text{عبارت} = \underbrace{\vec{FD} + \vec{DE}}_{\vec{FE}} + \vec{BF} = \vec{BF} + \vec{FE} = \vec{BE}$$

۳۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2a - b = x \\ a + b = y \end{cases} \Rightarrow 3a = x + y \Rightarrow |3a|^2 = |x + y|^2 \Rightarrow 9|a|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y$$

$$\Rightarrow 9|a|^2 = 3(\sqrt{2})^2 + 1^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times 1 \times \cos 45^\circ = 18 + 1 + 6 = 25 \Rightarrow$$

$$|a|^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow |a| = \frac{5}{3}$$

۳۱- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. مطابق نمودار، شغل a_3 فقط به نفر b_2 می رسد و در نتیجه شغل a_1 به نفر b_1 و سپس شغل a_2 به نفر b_3 خواهد رسید. در آخر شغل a_4 باید به یکی از دو نفر b_4 یا b_5 سپرده شود. پس این شرکت در مجموع به دو طریق می تواند برای پست های خالی با شرط این که هیچ پستی خالی نماند و به هر نفر حداکثر یک پست برسد، کارمند استخدام کند.

۳۲- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. تعداد گراف های ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ برابر است با $\binom{p}{2}$.

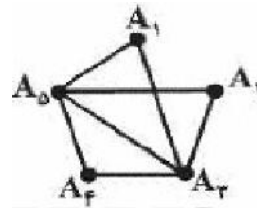
چون در این گراف a و b تنها (ایزوله) هستند، پس این دو رأس را کنار می گذاریم. تعداد گراف های ساده ای که با ۴ رأس باقی مانده می توان ساخت، برابر است با:

$$2^6 = 64 \xrightarrow{\text{کل گراف}} 6 = \binom{4}{2} = \text{کل یال با ۴ رأس مانده}$$

۳۳- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

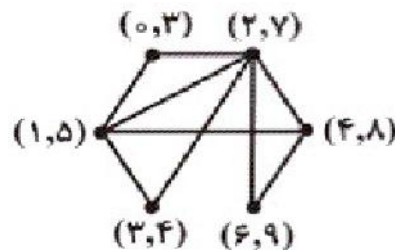
$$A_1 = (-1, 2), A_2 = (2, 4), A_3 = (-3, 6)$$

$$A_4 = (4, 8), A_5 = (-5, 10)$$



این گراف، ۷ یال دارد.

۳۴- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. کافی است تا نمودار این گراف را رسم کنیم، که در آن رأس ها متناظر با بازه های مورد نظر هستند.

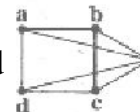


۳۵- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. برای تشخیص بازه ای بودن دو راه حل وجود دارد:

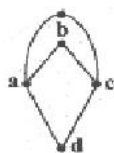
(۱) نگاه به شکل گراف کرده، اگر داخل آن یک چهارضلعی یا چندضلعی یافت شود که هیچ قطری از آن رسم نشده باشد، بازه ای نیست.

(۲) چنانچه بعد از اعمال روش (۱)، باز هم دو یا چند گزینه باقی ماند، از روش ترسیم استفاده می کنیم.

گزینه ی ۱: $abcd$ یک چهارضلعی است که هیچ قطری از آن رسم نشده است، لذا بازه ای نیست.

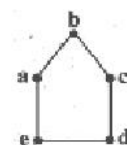


گزینه ی ۲: شکل گزینه ی (۲) به صورت $abcd$ قابل تغییر است که در آن یک چهارضلعی است که هیچ



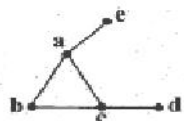
قطری از آن رسم نشده است.

گزینه ی ۳: شکل گزینه ی (۳) به صورت $abcde$ قابل تبدیل است که در آن یک پنج ضلعی است که قطر



آن رسم نشده است.

اما گزینه ی ۴: این گراف، گراف بازه ای است. به عنوان مثال می توان بازه های زیر را به عنوان رئوس آن در نظر گرفت.



$$a = (1, 4) \quad b = (2, 5) \quad c = (3, 6) \quad d = (5, 7) \quad e = (0, 2)$$



۳۶- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر در گرافی، Ω ضلعی فاقد قطر ($n \geq 4$) موجود

باشد، آنگاه این گراف بازه ای نیست، پس گراف های گزینه های (۳) و (۴) بازه ای

نیستند. هم چنین گراف های مقابل نیز بازه ای نیستند. (بررسی کنید.)

۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم کمترین تعداد یال گراف تهی است و حداکثر تعداد یال برای گراف کامل است.

$$0 < q \leq \binom{p}{2}$$

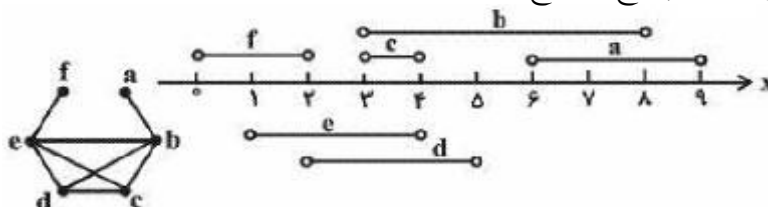
$$q = \frac{1}{2} \sum \deg(V_i) = \frac{1}{2} (4)(5) = 10$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a = (6, 9), b = (3, 8)$$

$$c = (3, 4), d = (2, 5)$$

$$e = (1, 4), f = (0, 2)$$



۳۹- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه V ، $\binom{6}{2} = 15$ زیر مجموعه‌ی دو عضوی دارد که از بین آن‌ها باید ۵ عضو انتخاب کنیم طوری که شامل عضو $\{v_1, v_2\}$ و فاقد $\{v_2, v_3\}$ باشد. پس باید به غیر از $\{v_1, v_2\}$ ، ۴ عضو دیگر از بین ۱۳ عضو باقی‌مانده انتخاب کنیم. در نتیجه تعداد گراف‌های مطلوب برابر است با: $\binom{13}{4}$
توجه: زیر مجموعه‌های دو عضوی V همان اعضای E (مجموعه یال‌ها) را تشکیل می‌دهند.

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر بتوان یک چند ضلعی فاقد قطر در گراف پیدا کرد آنگاه گراف، گراف بازه‌ها نمی‌تواند باشد.

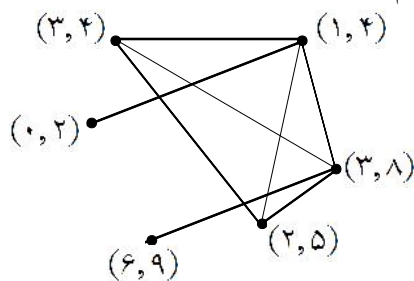
۴۲- هر یک از سه گزینه اول یک چهار ضلعی بدون قطر دارند. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد گراف‌های ساده با مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، برابر است با $\binom{p}{2}$
پس تعداد گراف‌های ساده با مجموعه رئوس $\{a, b, c, d, e\}$ و اندازه‌ی ۷ برابر است با:

$$\binom{5}{2} = \binom{10}{7} = 120$$

۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ بین هر دو رأس متمایز، حداکثر یک یال وجود دارد و هیچ رأسی طوقه ندارد.
تنها گراف G_4 ساده نیست، زیرا بین دو رأس a و b دو یال وجود دارد.
چهار گراف G_1, G_2, G_3 و G_5 ساده هستند.

۴۵- گزینه ۳ صحیح است. کافی است هر دو بازه‌ای که اشتراک دارند، به هم وصل کنیم، که ۸ یال دارد.



۴۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. جابه جایی متحرک را در این ۲ ثانیه به دست می آوریم.

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 0$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 6(2) + 2 = 14, y_2 = 5(2)^2 - 2(2) = 16$$

$$|\Delta r| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(14 - 2)^2 + (16 - 0)^2} \text{ m} = 20 \text{ m}$$

$$|\vec{V}| = \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m}}{2 - 0 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۴۷- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از بردار مکان متحرک، بردار شتاب متحرک را به دست می آوریم، سپس بردار شتاب در لحظه ی $t = 1 \text{ s}$ را حساب می کنیم و در آخر با استفاده از اندازه ی شتاب، اندازه ی α را به دست می آوریم:

$$\vec{r} = \alpha t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = 2\alpha t \vec{i} + 3t^2 \vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = 2\alpha \vec{i} + 6t \vec{j} \xrightarrow{t=1 \text{ s}} \vec{a} = 2\alpha \vec{i} + 6 \vec{j}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow 10 = \sqrt{4\alpha^2 + 36} \Rightarrow 100 = 4\alpha^2 + 36 \Rightarrow \alpha = \pm 4 \Rightarrow |\alpha| = 4$$

۴۸- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$1) \begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \end{cases} \rightarrow x = (y - 1)^2 \quad \times$$

$$2) \begin{cases} x = 2t^3 \\ y = t^3 + 1 \end{cases} \rightarrow x = 2(y - 1)^3$$

$$3) \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \rightarrow x = y^{2/3} \quad \times$$

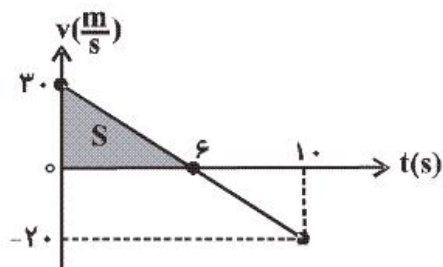
$$4) \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 2t \end{cases} \rightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y}{2} \quad \times$$

۴۹- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{19 - 7}{5 - 2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = Vt + x_0 \Rightarrow 7 = 4 \times 2 + x_0 \Rightarrow x_0 = -1 \text{ m} \Rightarrow x = 4t - 1$$

۵۰- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. در شکل مشاهده می شود که ابتدا اندازه ی سرعت در حال کاهش، سپس اندازه ی سرعت در حال افزایش و در نهایت دوباره کاهش می یابد.



۵۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در حرکت بر روی خط راست در مکانی که متحرک تغییر جهت می‌دهد، سرعتش برابر با صفر می‌گردد. با توجه به نمودار داده شده، متحرک در لحظه‌ی $t = 6s$ تغییر جهت داده است.

از طرف دیگر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان با محور زمان برابر با تغییر مکان جسم است و می‌توان نوشت:

$$\Delta x = S \Rightarrow x_6 - x_0 = S = \frac{6 \times 30}{2} = 90 \text{ m} \Rightarrow x_6 = 90 - 10 = 80 \text{ m}$$

یعنی در لحظه‌ی $t = 6s$ که جسم تغییر جهت می‌دهد، در مکان $x_6 = 80 \text{ m}$ قرار دارد.

۵۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مساحت سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان با محور زمان برابر تغییرات سرعت می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta v = S_{\text{دوزنقه}} \Rightarrow \Delta v = \left(\frac{8+4}{2} \right) \times 3 = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{18}{8} = 2.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

۵۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

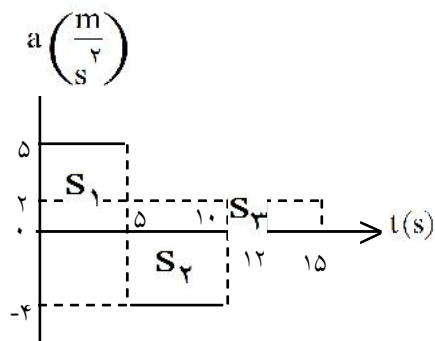
رابطه‌ی شتاب متوسط به صورت $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ می‌باشد و می‌دانیم مساحت سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان با محور

زمان برابر با تغییرات سرعت (Δv) است و داریم:

$$\Delta v = S_1 - S_2 + S_3$$

$$\Delta v = (5 \times 5) - (4 \times 5) + (2 \times 2) = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



۵۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. متحرک ۲ بار در لحظه‌های t_1 و t_3 که شیب نمودار صفر می‌شود، تغییر جهت داده است. از طرفی در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 حرکت متحرک تندشونده و در خلاف جهت محور X است. در لحظه‌ی t_2 مکان متحرک $x = 0$ است ولی سرعت آن منفی است. با توضیحات فوق گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۵۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. 0.8 ثانیه، زمانی است که گلوله‌ی اول، از نقطه‌ی تلاقی رفته تا اوج و برگشته است. بنابراین 0.4 ثانیه زمان لازم است که گلوله از نقطه‌ی اوج پایین بیاید و به محل رسیدن گلوله‌ها به یک‌دیگر برسد. پس

$$\Delta h = \frac{1}{2} g t^2 = 5 (0.4)^2 = 5 \times 0.16 = 0.8 \Rightarrow \Delta h = 0.8 \text{ m}$$

می‌توان نوشت:

۵۶- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$t_{\text{اوج B}} = \frac{V \cdot B}{g} = \frac{۲۲}{۱۰} = ۲/۲s$$

$$\left. \begin{aligned} y_A &= -\frac{1}{2}gt^2 + ۳۲t \\ y_B &= -\frac{1}{2}gt^2 + ۲۲t \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{فاصله ی دو گلوله از یکدیگر در یک لحظه ی معین}$$

$$= y_A - y_B = (۳۲ - ۲۲)t = ۱۰t \quad t = ۲/۲s \text{ فاصله ی دو گلوله از یکدیگر} = ۱۰ \times ۲/۲ = ۲۲m$$

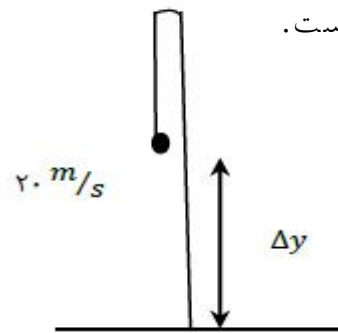
۵۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\Delta y = h$$

$$\Rightarrow d - \Delta y = ۴۰ \text{ m}$$

$$d = ۲۰ + ۲۰ + h = ۴۰ + h$$

$$\frac{۳ \times ۳۶۰}{۱۸} \text{ s} = \frac{۲۴۰}{\Delta t_{AB}} \rightarrow \Delta t_{AB} = ۴s$$



۵۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

۵۹- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + V \cdot t \Rightarrow -۷۰ = -۵ \times ۲^2 + ۲V \Rightarrow |V| = ۲۵ \frac{m}{s}$$

$$t_{\text{کل حرکت}} = t_{\text{رفت و برگشت به محل پرتاب}} + ۲ = ۲ \frac{V}{g} + ۲ = ۲ \times \frac{۲۵}{۱۰} + ۲ = ۷s$$

$$y_1 = \frac{1}{2}g(t+1)^2 = ۵(t+1)^2 \text{ گلوله ی اول}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}gt^2 = ۵t^2 \text{ گلوله ی دوم}$$

$$y_1 - y_2 = ۱۰ \Rightarrow ۵(t+1)^2 - ۵t^2 = ۱۰$$

$$\Rightarrow (۲t+1) = ۲ \Rightarrow t = ۰/۵ \text{ s}$$

۶۰- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.