

- ۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر به ترجمه‌ی آیه مراجعه شود، می‌توان به راحتی پاسخ درست را دریافت. (ای مردم، ستم‌های شما به زیان خود شماست.)
- ۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح می‌باشد. در بحث تعریف توحید در ربوبیت می‌خوانیم که: چون تنها خالق تمام جهان خداوند است، به‌طور طبیعی تدبیر و پرورش همه‌ی مخلوقات را نیز در اختیار دارد. باغبان (انسان) ← در مقایسه با دیگران که در کشت و عمل او دخالتی نداشته‌اند، زراعت و کار را از خودش می‌بیند.
- ۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. «متاع الحیاة الدنیا»، یعنی دنیا که کالایی زودگذر است مرکز توجه مردم قرار گرفته است و موجب گردیده آن‌ها با پیش گرفتن راه غفلت به ظلم و تجاوز بپردازند.
- ۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. رجوع شود به قسمت طرح یک سوال در صفحه‌ی ۱۸.
- ۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.
- خداوند که تنها خالق تما جهان است، به‌طور طبیعی، تدبیر و پرورش همه‌ی مخلوقات را نیز در اختیار دارد. اوست که جهان را اداره می‌کند و به سوس مقصدی که برایش معین فرموده، هدایت می‌نماید و به پیش می‌برد.
- هرگونه تصرف در جهان، حق خدا و شایسته‌ی اوست و اگر او به کسی اذن دهد، آن شخص نیز می‌تواند در محدوده‌ی اجازه‌ی خداوند در اشیایی تصرف نماید.
- ۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در کتاب در توضیح آیه‌ی شریفه می‌خوانیم که: نور بودن خداوند بسیار برتر و بالاتر است. او نور هستی است. یعنی تمام موجودات، وجود خود را از او می‌گیرند و به سبب او پیدا و آشکار می‌شوند و وجودشان به وجود او وابسته است. به همین جهت هر چیزی در این جهان، بیان‌گر وجود خالق و آیه‌ای از آیات الهی محسوب می‌شود.
- ۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
- ۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. صورت سؤال به وضوح اشاره به رابطه‌ی میان شناخت خدا و بندگی او می‌نماید. در حقیقت می‌گوید: توحید در ربوبیت ← توحید عبادی را و در گزینه‌ی ۲ داریم که ستایش مخصوص خدایی است که پروردگار جهانیان است. می‌دهد
- ۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ترجمه‌ی آیه‌ی شریفه: «بگو خدا است خالق همه چیز و اوست یگانه‌ی چیره.»
- با توجه به اشاره به مبحث خالقیت خداوند بیانگر توحید خالق است.
- براساس عبارت «و هو الواحد القهار» نشانگر اصل توحید یا توحید در ذات است.
- از آنجایی که آیه، هم حاکی از توحید در خالقیت و هم ذاتی است، با جمله‌ی «لا اله الا الله» رابطه‌ی کامل تری دارد. چرا که این جمله جامع همه‌ی ابعاد توحید است و عبارت «قل هو الله احد» فقط بیانگر اصل توحید می‌باشد.

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

(إن یشاء یدهبکم ...) ← اشاره به اراده‌ی الهی در بقا و حفظ موجودات دارد. ← توحید در ربوبیت  
(و لا یشرک فی حکمه احدا) ← اشاره به حکم‌رانی، فرمانروایی و ولایت الهی دارد. ← توحید در ولایت  
(قد جاءکم بصائر من ربکم) ← اشاره به هدایت الهی می‌نماید. ← توحید در ربوبیت

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرکت در خالقیت:

تصور چند خالق و چند مبدأ برای جهان و آفرینش بخشی از جهان توسط هر کدام یا با همکاری یکدیگر سبب فرض نمودن هر کدام به صورت ناقص و محدود است.  
چنین خدایان ناقصی نیازمندند و به خالق کامل و بی‌نیازی محتاجند تا نیاز آن‌ها را برطرف کند. آیه‌ی شریفه‌ی (قل هو الله احد) اشاره به یکتایی خداوند دارد.

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در بحث توحید در مالکیت می‌خوانیم که چون مخلوقات جهان از خداست، مالک اصلی و حقیقی آن‌ها نیز خداوند است و در این مالکیت کسی شریک او نیست. و مالکیت انسان و سایر مخلوقات زمانی پذیرفته است که در طول مالکیت خداوند باشد نه مستقل از آن.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صورت سوال تعریف اصل توحید یا همان وحدت ذاتی خداوند است یعنی خداوند یگانه‌ی بی‌همتا است که شریک، مثل و مانندی ندارد و در ذات خود غنی است که آیه‌ی شریفه‌ی «قل هو الله احد» به این یکتایی و بی‌همتایی اشاره می‌نماید.

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این که تصور می‌کنیم دو یا چند خدا وجود دارند و هر کدام خالق بخشی از جهان هستند یا با همکاری یکدیگر، این جهان را آفریده‌اند در حقیقت هر کدام از آن‌ها را محدود و ناقص فرض نموده‌ایم ... از این آیه برداشت می‌شود که خالق باید از هر جهت بی‌نیاز باشد.

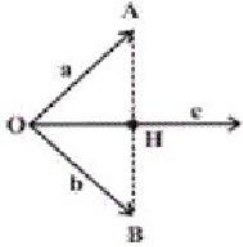
۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطرهای متوازی الاضلاع بردارهای  $a + b$  و  $a - b$  می‌باشند.

$$\vec{a} = (3, 3, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b = (4, 2, -2) = \vec{u} \\ a - b = (2, 4, 2) = \vec{v} \end{cases}$$

$$\vec{b} = (1, -1, -2)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{8 + 8 - 4}{\sqrt{24} \sqrt{24}} = \frac{1}{2}$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بردار  $c$  مضربی از مجموع دو بردار  $a$  و  $b$  است.



$$a + b = \left( \frac{6}{5}, 0, \frac{12}{5} \right)$$

بین گزینه‌ها بردار  $(1, 0, 2)$  مضربی از  $a + b$  است.

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که عبارت  $4x^2 + y^2 + z^2$  مربع اندازه‌ی بردار  $a = (2x, y, z)$  است از معادله‌ی  $2x + y - 2z = 12$  استفاده کرده بردار  $b = (1, 1, -2)$  را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$a \cdot b = 2x + y - 2z \Rightarrow a \cdot b = 12$$

$$a \cdot b \leq |a| |b| \Rightarrow 12 \leq \sqrt{4x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{144}{6} = 24 \Rightarrow \min(4x^2 + y^2 + z^2) = 24$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر  $a$  و  $b$  نسبت به  $c$  قرینه یک‌دیگر باشند حتماً  $|a| = |b|$  است. ۴ گزینه غلط است چون در این سوال  $|a| \neq |b|$  پس سؤال متأسفانه غلط است.

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برداری که با جهت مثبت هر ۳ محور، زوایای حاده‌ی یکسان می‌سازد را می‌توان به شکل  $b = (x, x, x)$  که در آن  $x > 0$  است در نظر گرفت. بنابراین:

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{(4, -3, 2) \cdot (x, x, x)}{(\sqrt{x^2 + x^2 + x^2})^2} (x, x, x) \Rightarrow a' = \frac{4x - 3x + 2x}{3x^2} (x, x, x)$$

$$\Rightarrow a' = \frac{1}{x} (x, x, x) = (1, 1, 1)$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گر  $O$  مبدأ مختصات باشد آن‌گاه مطابق فرض داریم:

$$\vec{AM} = 2\vec{MB} \Rightarrow (\vec{OM} - \vec{OA}) = 2(\vec{OB} - \vec{OM}) \Rightarrow 3\vec{OM} = \vec{OA} + 2\vec{OB}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + 2\vec{OB}) = \frac{1}{3}((1, -3, -1) + (2, 0, 4)) = \frac{1}{3}(3, -3, 3) = (1, -1, 1)$$

۲۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \frac{1-2}{-n} = \frac{n}{2(1)+n} \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \xrightarrow{n > 0} n = 2$$

$$a = (1, -1, 2) \Rightarrow |a| = \sqrt{6}, b = (2, -2, 4) \Rightarrow |b| = 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{2}$$

۲۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a \cdot b = (m, 2m, 3) \cdot (3, -1, 2m) = 7 \Rightarrow 3m - 2m + 6m = 7 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow 3m - 2m + 6m = 7 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow a = (1, 2, 3), b = (3, -1, 2)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{7}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

۲۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a + b = 7i + 3j + 6k \quad a - b = -3i + 3j + 2k$$

راه اول: قطرهای متوازی الاضلاع، بردارهای  $a + b$  و  $a - b$  می‌باشند که کافی است زاویه‌ی بین آن‌ها را محاسبه کنیم.

$$\cos \theta = \frac{(a + b) \cdot (a - b)}{|a + b||a - b|} = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

راه دوم: چون اندازه‌ی دو بردار  $a$  و  $b$  با هم برابر است پس دو بردار، یک لوزی تشکیل می‌دهند و در نتیجه قطرهای آن بر هم عمودند.

۲۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اندازه‌ی تصویر قائم بردار  $a$  روی امتداد بردار  $b$  برابر است با:

$$|a'| = \frac{|a \cdot b|}{|b|} = \frac{|-12 - 2 - 21|}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{35}{7} = 5$$

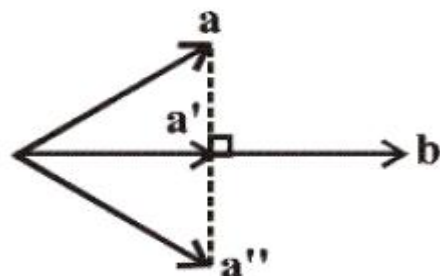
۲۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مختصات هر پیکان برابر تفاضل نقطه‌ی انتهای آن از نقطه‌ی ابتدای آن به همین دلیل داریم:

$$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} \Rightarrow 3\vec{AM} \Rightarrow 3(M - A) = 2(B - A) \Rightarrow 3M - 3A = 2B - 2A \Rightarrow 3M = 2B + A$$

$$\Rightarrow 3M = 2(-1, 2, 4) + (5, -4, 1) \Rightarrow 3M = (3, 0, 9) \Rightarrow M = (1, 0, 3) \Rightarrow OM = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

۲۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، اگر  $a'$  و  $a''$  به ترتیب تصویر قائم و قرینه‌ی بردار غیر صفر  $a$  نسبت به امتداد بردار غیر صفر  $b$  باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} a'' = 2a' - a = \frac{2a \cdot b}{|b|^2} b - a \\ a \cdot b = (1, 2, -2) \cdot (1, 2, 2) = 1 + 4 - 4 = 1 \\ |b| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 \\ \Rightarrow a'' = \frac{2}{9}(1, 2, 2) - (1, 2, -2) = \left(\frac{-7}{9}, \frac{-14}{9}, \frac{22}{9}\right) \end{cases}$$



۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

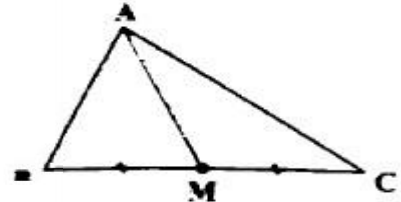
نکته: مختصات وسط دو نقطه‌ی  $(a_1, a_2, a_3)$  و  $(b_1, b_2, b_3)$  عبارت است از:

$$\left( \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

نکته: طول پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی  $A(a_1, a_2, a_3)$  و  $B(b_1, b_2, b_3)$  برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

$$M = \frac{B + C}{2} = \frac{(2, -1, 6) + (0, -3, 4)}{2} = (1, -2, 5)$$



$$|AM| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (5 + 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، آنگاه زاویه‌ی بین این بردار و محورهای مختصات از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\text{محور } x \text{ ها } \cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} \quad \text{محور } y \text{ ها } \cos \beta = \frac{a_2}{|a|} \quad \text{محور } z \text{ ها } \cos \gamma = \frac{a_3}{|a|}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|a|} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = 135^\circ$$

با استفاده از نکته‌ی فوق، داریم:

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که عبارت  $4x^2 + y^2 + z^2$  مربع اندازه‌ی بردار  $a = (2x, y, z)$  است از معادله‌ی  $2x + y - 2z = 12$  استفاده کرده بردار  $b = (1, 1, -2)$  را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$a \cdot b = 2x + y - 2z \Rightarrow a \cdot b = 12$$

$$a \cdot b \leq |a||b| \quad \text{طبق نامساوی کوشی - شوارتز}$$

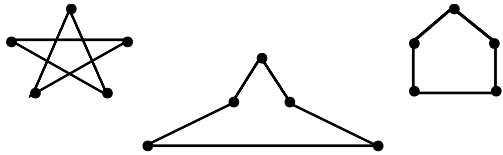
$$\Rightarrow 12 \leq \sqrt{4x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{144}{6} = 24 \Rightarrow \min(4x^2 + y^2 + z^2) = 24$$

۳۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$P+q=8 \rightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=4 \end{cases}$$

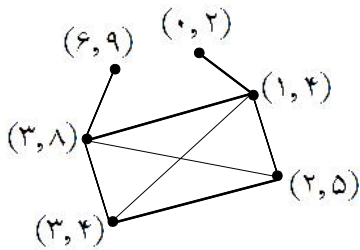
$$k_4 = \binom{4}{2} = 6 \Rightarrow 6-4=2$$



۳۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

فرم کلی دورهای به طول ۵ در گراف به صورت‌های مقابل می‌باشد که تعداد آن‌ها ۷ تا است.

۳۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. یک مسیر به طول یک از (۰, ۲) به (۱, ۴) وجود دارد و از (۱, ۴) به (۳, ۴) تعداد ۵ مسیر وجود دارد پس تعداد کل مسیرها برابر است با ۵.



۳۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

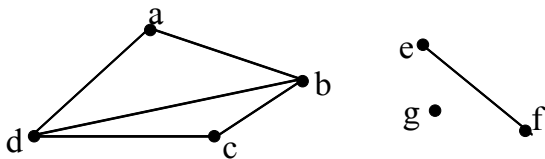
$$\binom{5}{5} \times \frac{(5-1)!}{2} = 12$$

$$\binom{P}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

نکته: تعداد دور به طول m در گراف کامل از مرتبه‌ی P برابر است با

۳۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. شکل گراف رسم شود

از ۳ بخش جداگانه از هم تشکیل شده است.



۳۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در گراف ۳ منتظم با مرتبه P داریم  $q = \frac{3P}{2}$  با توجه به فرض:

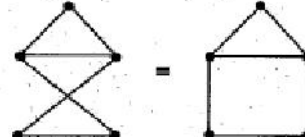
$$2P - 3 = \frac{3P}{2} \Rightarrow 4P - 6 = 3P \Rightarrow P = 6$$

۳۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

تذکر:

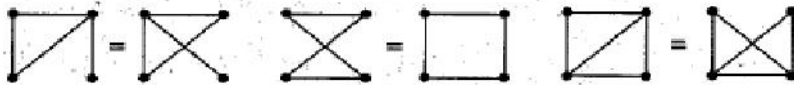


گزینه‌ی ۴: تغییر یافته‌ی گزینه‌ی ۱ است.

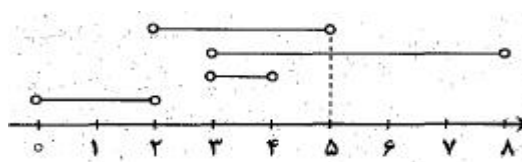


گزینه‌ی ۱:

دو گراف که از همه لحاظ مانند هم هستند و فقط شکل ظاهری آنها تفاوت دارد را یکرخیخت می‌نامند. اگر رئوس دو گراف نام‌گذاری شده باشند، یکرخیختی به معنای یکسان بودن کلیه‌ی رئوس و یال‌ها می‌باشد، اما اگر رئوس گراف نام‌گذاری نشده باشند، می‌توان هر دو گراف یکرخیخت را به گونه‌ای نام‌گذاری کرد که تمام یال‌ها و رئوس‌شان یکسان شوند. مثلاً گراف‌های زیر یکرخیخت می‌باشند:



در واقع گراف‌های یکرخیخت با یک تغییر شکل هندسی ظاهری به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

۳۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.  $X$  بازه‌ای است که با  $(0, 2)$  و  $(3, 8)$  و $(3, 4)$  و  $(2, 5)$  اشتراک دارد. اگر  $X$  بخواهد با این ۴ بازه اشتراکداشته باشد، حداقل باید بازه‌ی  $[2, 3]$  را در خودش جای دهد و بابازه‌ی  $(6, 9)$  اشتراک نداشته باشد که فقط در گزینه‌ی ۳ این گونه است.اگر  $X = (1, 8)$  باشد، این رأس باید با  $(6, 9)$  مجاور باشد در حالی که مجاور نیستند. اگر  $X = (2, 9)$  باشد، باید با $(6, 9)$  مجاور باشد که با توجه به شکل مجاور نیستند. هم‌چنین در مورد  $X = (0, 7)$  که باید با  $(6, 9)$  مجاور باشد

که نیست.

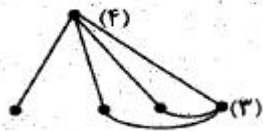
۳۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. برای آن که  $\deg(a) = 4$  باشد، باید از بین ۵ رأس دیگر ۴ تا را انتخاب کنیم و به  $a$ وصل کنیم  $\binom{5}{4}$  و حالا از بین ۱۰ یالی که می‌توان بین ۵ رأس دیگر ساخت باید ۲ تا را انتخاب کنیم که با ۴ تایالی که از  $a$  می‌گذرد داشته باشیم:  $q = 6$ ، لذا چون این دو عمل مستقل از هم است بنابر اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \text{جواب نهایی: } \binom{5}{4} \binom{10}{2} = 225$$

نکته: اگر هم برای اندازه‌ی گراف و هم برای درجه‌ی رئوس شرط تعیین شده بود، ابتدا درجه‌ی رئوس را انتخاب

می‌کنیم و سپس شرط اندازه را بر گراف اعمال می‌کنیم.

۴۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



گزینه‌ی ۱: در این دنباله‌ی درجات، ما ۲ رأس از درجه‌ی ۱ - P داریم. در نتیجه باید  $\delta \geq 2$  باشد در صورتی که در این جا  $\delta = 1$  است.

گزینه‌ی ۳: تعداد رئوس درجه‌ی فرد، باید زوج باشد.

گزینه‌ی ۲: تمام شروط لازم رعایت شده است، اما پس از رسم رأس درجه‌ی (۴) و رسم اولین رأس درجه‌ی ۳، تعداد رئوس درجه‌ی (۱) با دنباله‌ی درجه‌ی موجود تطابق ندارد.

با توجه به این که هنوز رأس درجه‌ی (۳) دوم را رسم نکرده‌ایم، تعداد رئوس درجه‌ی (۱) باقی‌مانده یکتا است. ضمن آن که تنها راسی که می‌تواند درجه‌ی (۱) را در دنباله تولید کند، رأس با درجه‌ی (۱) است که در صورت متصل شدن به ۳ رأس باقی‌مانده، دنباله‌ی درجات (۲, ۳, ۳, ۴, ۴) خواهد شد.

۴۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$p \times q = 50 = 5 \times 10 = 5 \times \binom{5}{2} \Rightarrow P = 5$$

$$k_p \text{ در } r \text{ طول به } = \binom{p}{r} \frac{(r-1)!}{2} \Rightarrow \binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$$

۴۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. درجات رئوس گراف ساده و همبند اعداد  $a, b, c, 1, 3, 4$  است.

پس تعداد رئوس  $p = 6$  است. از طرفی  $q = \frac{3}{2} p$  پس  $q = 9$  بوده و بنابراین  $\sum \deg = 2q = 18$  می‌باشد. پس:

$$4 + 3 + 1 + a + b + c = 18 \Rightarrow a + b + c = 10$$

با توجه به این که  $p = 6$  است، حداکثر درجه‌ی یک رأس برابر  $5 = p - 1$  می‌باشد. حالات زیر متصور است:

حالت اول حذف:  $5, 4, 4, 3, 1, 1 \Rightarrow$  دنباله درجات:  $5, 4, 4, 3, 1, 1$

با توجه به قانون هاول حکیمی: این گراف قابل رسم نیست.  $\Rightarrow 3, 3, 2, 0, 0 \Rightarrow 5, 4, 4, 3, 1, 1$

حالت دوم:  $5, 4, 3, 3, 2, 1 \Rightarrow$  دنباله درجات:  $5, 4, 3, 3, 2, 1$

حالت سوم:  $4, 3, 3 \Rightarrow \{a, b, c\} = \{4, 3, 3\}$

می‌دانیم در یک مجموعه تکرار عضو جایز نیست و عضوی که چند بار تکرار شده باشد را باید فقط یک بار بنویسیم. بنابراین مجموعه‌ی  $\{4, 3, 3\}$  را به عنوان جواب نمی‌پذیریم.

۴۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



اگر  $p = 7$  و  $q = 0$  باشد، گراف به صورت صفر منتظم رسم می‌شود (حالت ۱).

اگر  $p = 6$  و  $q = 1$  باشد، گراف تنها به صورت رسم می‌شود (حالت ۱).

اگر  $p = 5$  و  $q = 2$  باشد، ممکن است گراف رأس درجه‌ی ۲ داشته باشد یا نداشته باشد (حالت ۲).



اگر  $p = 4$  و  $q = 3$  باشد، گراف‌های قابل رسم می‌باشد (حالت ۳).

از  $p = 3$  و  $q = 4$  به بعد گراف قابل رسم نیست، پس به ۷ صورت رسم می‌شود. دقت کنید که اگر کلمه‌ی «نوع» در سؤالی به کار رفته بود، منظور ریخت گراف‌ها یعنی نام‌گذاری نشدن رئوس است که باید با آزمون و خطا این گراف‌ها را به دست آورد.



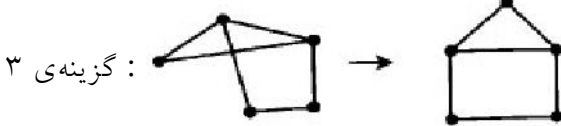
۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\binom{5}{5} \times \frac{(5-1)!}{2} = 12$$

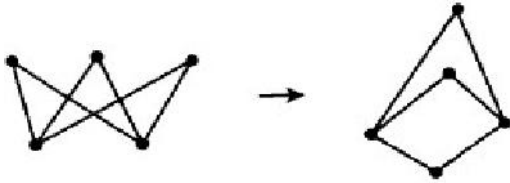
$$\binom{P}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

نکته: تعداد دور به طول  $m$  در گراف کامل از مرتبه  $P$  برابر است با

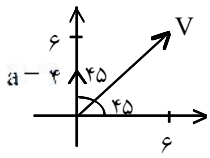
۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ با هم یکرخت هستند.



ولی گزینه ۴ با آن‌ها یکرخت نیست. (زیرا در آن دو رأس درجه‌ی ۳ با هم مجاور نیستند.)



۴۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6\vec{i} + (4t+2)\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{j} \quad t=1s \quad \vec{v} = 6\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\vec{a} = 4\vec{j} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

۴۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مبدأ را محل رها کردن گلوله‌ها فرض کردیم. زمان حرکت اولی  $t$  و دومی  $(t-2/5)$  می‌باشد و در این صورت:

$$y_1 - y_2 = -68/75 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 - \left(-\frac{1}{2}g(t-2/5)^2\right) = -68/75 \Rightarrow -5[t^2 - (t-2/5)^2] = -68/75 \Rightarrow$$

$$5(2/5)(2t-2/5) = 68/75 \rightarrow 2t-2/5 = 5/5 \rightarrow 2t=8 \rightarrow t=4s$$

۴۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، ارتفاع اوج هر سه گلوله یکسان است، بنابراین طبق رابطه‌ی ارتفاع

اوج در حرکت پرتابی  $\left(H = \frac{(V \cdot \sin\alpha)^2}{2g}\right)$  می‌توان نتیجه گرفت که مقدار  $(V \cdot \sin\alpha)$  برای هر سه گلوله

یکسان است. این مقدار سرعت گلوله‌ها در راستای قائم است، بنابراین زمان حرکت گلوله‌ها  $\left(t = \frac{2(V \cdot \sin\alpha)}{g}\right)$

برای هر سه گلوله یکسان است (گزینه‌ی ۱) چون از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است، بنابراین اندازه‌ی سرعت گلوله‌ها در یک ارتفاع تا قبل از رسیدن به نقطه‌ی اوج و بعد از آن یکسان است و در نتیجه مؤلفه‌ی قائم سرعت هر سه گلوله در لحظه‌ی برخورد به زمین نیز یکسان خواهد بود (گزینه‌ی ۳) با توجه به این که برد گلوله‌ی (۳) از بقیه‌ی گلوله‌ها بیش‌تر است، بنابراین مؤلفه‌ی سرعت اولیه‌ی گلوله در راستای افقی که در کل مسیر ثابت است، برای گلوله‌ی (۳) از بقیه‌ی گلوله‌ها بیش‌تر است (نادرستی گزینه‌ی ۴) و در نتیجه در نقطه‌ی اوج که سرعت گلوله‌ها برابر با مؤلفه‌ی افقی سرعت اولیه‌ی آن‌ها است، سرعت گلوله‌ی ۳ بیش‌تر است (گزینه‌ی ۲).

۴۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{V}_0 = 15\vec{i} + 20\vec{j} \rightarrow \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\alpha = 15 \\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x = V_0 \cos\alpha \cdot t \\ \Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha \cdot t \end{cases} \xrightarrow{t=3s} \begin{cases} \Delta x = 15 \times 3 = 45m \\ \Delta y = -5(9) + 20 \times 3 = 15m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} = \Delta \vec{r} = 45\vec{i} + 15\vec{j}$$

۵۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \vec{a} = \frac{(30\hat{i} + 19\hat{j}) - (-2\hat{i} - 5\hat{j})}{12 - 2} = \frac{32\hat{i} + 24\hat{j}}{10}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{32}{10}\right)^2 + \left(\frac{24}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2 \times (16+9)} = 4 \text{ m/s}^2$$

۵۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$t_1 + t_2 = \frac{2V \cdot y}{g} \Rightarrow 3 + 5 = \frac{2 \times V \cdot y}{10} \Rightarrow V \cdot y = 40 \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} V_x = 4t - 4 \\ V_y = 2t^2 - 4t + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_x = 4 \\ a_y = 4t - 4 \end{cases}$$

۵۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، شتاب در راستای محور X ثابت و برابر ۴ متر بر مجذور ثانیه است. بنابراین در لحظه‌ای که اندازه‌ی شتاب در راستای محور Y دارای کم‌ترین اندازه باشد، اندازه‌ی شتاب این متحرک به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد.

$$a_y = 4t - 4 = 0 \rightarrow t = 1 \text{ s}$$

۵۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x = -t^2 + 4t - 4 \Rightarrow V_x = -2t + 4 \quad , \quad V_x = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

در لحظه‌ی  $t = 2 \text{ s}$  جهت حرکت متحرک عوض می‌شود، بنابراین در ۴ ثانیه‌ی اول حرکت، جابه‌جایی با مسافت برابر نیست، در نتیجه باید بازه‌ی زمانی  $t = 0$  و  $t = 4 \text{ s}$  را به دو بازه‌ی زمانی تقسیم کنیم،  $t = 0$  تا  $t = 2 \text{ s}$  و  $t = 2 \text{ s}$  تا  $t = 4 \text{ s}$  که در هر یک از این بازه‌ها جهت حرکت ثابت است و مسافت با قدرمطلق جابه‌جایی برابر است.

$$\begin{cases} \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \text{ m} \\ t = 2 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x_1 = 4 \text{ m} \Rightarrow \text{مسافت پیموده شده} = 4 \text{ m} \\ \begin{cases} t = 2 \text{ s} \Rightarrow x_1 = 0 \\ t = 4 \text{ s} \Rightarrow x_2 = -4 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x_2 = -4 \text{ m} \Rightarrow \text{مسافت پیموده شده} = 4 \text{ m} \end{cases}$$

**توجه:** می‌توانستید با استفاده از معادله‌ی سرعت-زمان، نمودار آن را رسم کرده و سطح زیرنمودار را به دست آورید.

۵۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V = 2\pi t + 2\pi \cos \pi t$$

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow V = 2\pi + 2\pi \cos \pi = 2\pi + 2\pi(-1) = 0$$

۵۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.  $t$  را بر حسب  $x$  حساب کرده در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم.

$$x = 4t^2 - 16 \Rightarrow x + 16 = 4t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{x + 16}{4} \Rightarrow y = 2 \left( \frac{x + 16}{4} \right) = \frac{2x}{4} + \frac{32}{4} \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 8$$

۵۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{V} = 6\vec{i} + (\Delta t - 2)\vec{j}$$

$$t = 2 \rightarrow \vec{V} = 6\vec{i} + 8\vec{j} \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \frac{m}{s}$$

۵۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t^2 - 6)\vec{i} + (2t^2 + 8)\vec{j}$$

$$t = 0 \rightarrow \vec{V}_0 = (-6)\vec{i} + 8\vec{j} \Rightarrow |\vec{V}_0| = 10 \frac{m}{s}$$

۵۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

شتاب پیوسته ثابت است و مقدار آن از رابطه زیر به دست می آید.

$$a = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \frac{m}{s^2} = 5 \frac{m}{s^2}$$

۵۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$H = \frac{V_y^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Rightarrow 80 = \frac{V_y^2 \sin^2 \alpha}{20} \Rightarrow V_y \sin \alpha = 40 \frac{m}{s}$$

$$\text{زمان رسیدن به نقطه اوج} = T = \frac{V_y \sin \alpha}{g} = \frac{40}{10} s = 4 s$$

$$R = (V_x \cos \alpha) \times 2T \Rightarrow 160 = (V_x \cos \alpha) 8 \Rightarrow V_x \cos \alpha = 20 \frac{m}{s}$$

$$V_0 = \sqrt{V_{0y}^2 + V_{0x}^2} = \sqrt{40^2 + 20^2} = 20 \sqrt{4 + 1} = 20 \sqrt{5} \Rightarrow V_0 = 20 \sqrt{5} \frac{m}{s}$$

۶۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t)\vec{i} + (2t + 4)\vec{j} \Rightarrow \vec{V}(2) = 4\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8\sqrt{2} \frac{m}{s}$$