

- ۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ما همواره دیده‌ایم که در مصنوعات انسانی رابطه‌ی چندانی میان بقای یک مصنوع با سازنده‌ی آن وجود ندارد؛ مثلاً یک خانه بدون هیچ ارتباطی با معمار و حتی پس از مرگ او تا سالیان طولانی باقی می‌ماند به همین جهت ممکن است برخی گمان کنند که یک معلول در بقای خود نیازی به علت ندارد. باید بدانیم که معمار علت اصلی ساختمان نیست و به ساختمان و اجزای آن وجود نبخشیده است و وظیفه‌ی او فقط جابه‌جایی اجزا و قرار دادن آن‌ها در جای خود بوده است، اما رابطه‌ی خدا با مخلوقات این گونه نیست. در گزینه‌های ۲ و ۴ عبارت در ارتباط با معمار نادرست است و شکل صحیح آن بدون ارتباط با معمار است.
- ۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اعتقاد به واگذار شدن بخشی از سرپرستی جهان به پیامبر (ص) با توحید در ولایت «ما لهم من دونه من ولی» منافات دارد و پایه و اساس دین در آیه‌ی «و لم یکن له کفوا احد» متجلی است.
- ۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به آیه‌ی «و لله ما فی السماوات و ما فی الارض و الی الله ترجع الامور» که در رابطه با «توحید در مالکیت» خداوند بیان شده است، می‌توان گفت که چون مخلوقات جهان از خداست، مالک اصلی و حقیقی آن‌ها نیز خداوند است. گزینه‌ی ۱ مربوط به توحید در ولایت است. در رابطه با گزینه‌ی ۲ باید توجه داشته باشید که فرمانروایی خداوند بر جهان خلقت، ترسیم‌کننده‌ی توحید در ولایت اوست.
- ۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. عین هم بودن خدایان مستلزم آن است که هر یک از خدایان کمالاتی را داشته باشد که دیگری نیز آن کمالات را دارد. در این صورت دیگر چند خدا نیستند و آیه‌ی شریفه‌ی «قل الله خالق کل شیء» نیز در تقابل با تعدد و تکثر در امر آفرینش و مؤید توحید در خالقیت است.
- ۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. حق تصرف داشتن مربوط به توحید در ولایت است و با آیه‌ی «ما لهم من دونه من ولی و لا یشرک فی حکمه احدا» ارتباط معنایی دارد.
- ۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. توحید در مالکیت، علت توحید در ولایت است و آیه‌ی شریفه‌ی ۲۶ سوره‌ی کهف «... ما لهم من دونه من ولی و لا یشرک فی الحکمه احدا» مؤید همین مفهوم است.
- ۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برخی انسان‌ها توحید در خالقیت را قبول دارند، اما گرفتار شرک در ربوبیت می‌شوند و اطاعت از خداوند لازمه‌ی عبودیت است.
- ۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. وقتی گفته شود: «دلی کز معرفت نور و صفا دید به هر چیزی که دید اول خدا دید» مفهوم اشاره شده در گزینه‌ی ۲ بیان‌گر مفهوم این بیت نیست. در صورتی که گزینه‌های دیگر در ارتباط با مفهوم خدا نور هستی بیان شده‌اند و با یک‌دیگر ارتباط معنایی دارند.
- ۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. بیت مذکور بیانگر مقدمه‌ی دوم نیازمندی جهان به خدا در پیدایش است. یعنی هر پدیده‌ای که وجودش از خودش نباشد، برای موجود شدن نیازمند به دیگری است.

- ۱۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. وقتی گفته می‌شود: انسان و موجودات جهان پدیده‌هایی هستند که در وجود به خودشان متکی (خوداتکا) نیستند، به مقدمه‌ی اول استدلال نیازمندی جهان به خداوند در مرحله‌ی پیدایش اشاره کرده‌ایم که عبارت شریفه‌ی «اتم الفقراء الی الله» بیان‌گر این است که جهان و مخلوقات به وجودی که برتر و سرچشمه هستی است و هستی از او جدا نمی‌شود، نیازمند هستیم.
- ۱۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اصولاً عقیده به توانایی پیامبر اکرم (ص) و اولیای دین وقتی موجب شرک است که این توانایی را از خود آن‌ها بدانیم و اکنون اگر ما از رسول خدا (ص) چیزی درخواست می‌کنیم، درخواست از جسم ایشان نیست، بلکه از حقیقت روحانی و معنوی ایشان است.
- ۱۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. هر یک از ما با تمام وجود خدا را می‌یابیم و حضورش را درک می‌کنیم (درک فطری خداوند) به همین جهت در مشکلات و سختی‌ها به او پناه می‌بریم و از او کمک می‌طلبیم، انسان‌ها هر قدر که به معنای حقیقی کامل‌تر شوند، (علت) فقر و نیازمندی خود را بهتر درک می‌کنند و بندگی و عبودیتشان در پیشگاه خداوند قوی‌تر و بیش‌تر می‌شود و به همین جهت پیامبران، امامان و اولیای الهی بیش از دیگران با پروردگار جهان راز و نیاز می‌کنند و از او کمک می‌خواهند و در مشکلات به او پناه می‌برند.
- ۱۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. حدیث امام علی (ع) و آیه‌ی «الله نور السماوات و الارض» هر دو به این موضوع اشاره دارند که در جهان هر چیزی آیه‌ای از آیات الهی است. عبارت «الحمد لله المتجلی...» حدیثی از حضرت علی (ع) است.
- ۱۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱ و ۲ بیان‌گر شرک در ربوبیت و گزینه‌ی ۳، بیان‌گر شرک در خالقیت است ولی گزینه‌ی ۴، مفهوم شرک ندارد. چرا که مستقل از خدا تعریف نشده است.
- ۱۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مالکیت خداوند از خالقیت خداوند سرچشمه می‌گیرد و ولایت خداوند از مالکیت حقیقی خداوندی سرچشمه می‌گیرد.

۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی M وسط ضلع AC است، پس:

$$M = \frac{1}{2}[(1, -2, 4) + (3, -2, 2)] = (2, -2, 3) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (1, -1, 0)$$

از سوی دیگر داریم $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$ ، پس اگر θ زاویه‌ی موردنظر باشد، آن‌گاه می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BM}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(1, -1, 0) \cdot (2, 0, -2)}{|(1, -1, 0)| |(2, 0, -2)|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$|OA| = \sqrt{(a-1)^2 + a^2 + a^2} = 3 \Rightarrow 3a^2 - 2a + 1 = 9 \Rightarrow 3a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2, -\frac{4}{3}$$

(الف) $a = 2 \Rightarrow A = (1, 2, 2) \Rightarrow$ فاصله تا محور x ها $= \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

(ب) $a = -\frac{4}{3} \Rightarrow A = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow$ فاصله تا محور x ها $= \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

۱۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$M = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{7}\right)$$

$$|AM| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{2}{4} + 7} = \sqrt{\frac{79}{4}} = \frac{\sqrt{79}}{2}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر a' تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b باشد، آن‌گاه:

$$a'' = 2a' - a \Rightarrow a' = \frac{1}{2}(a'' + a) = \frac{1}{2}((-2, 3, -1) + (2, 1, -3)) \Rightarrow a' = (0, 2, -2)$$

a' بردار هم‌راستا با بردار b است، پس طبق فرض داریم:

$$b = ma' = m(0, 2, -2), |b| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{m^2(0 + 4 + 4)} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

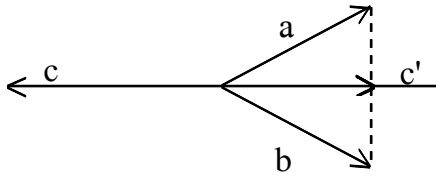
$$\begin{cases} m = \frac{1}{2} \Rightarrow b = (0, 1, -1) \\ m = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = (0, -1, 1) \end{cases}$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} V_1 \cdot V_2 = 0 &\Rightarrow 2 - b + a = 0 \\ V_1 \cdot V_3 = 0 &\Rightarrow c - 3 + 2a = 0 \\ V_2 \cdot V_3 = 0 &\Rightarrow 2c + 3b + 2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ c + 2a = 3 \\ 2c + 3b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 3b - 2a = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2, b = 4, c = -1$$

پس $a + b + c = 5$ و گزینه ۱ درست است.



۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}' \Rightarrow 1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2\vec{c}' \Rightarrow \vec{c}' = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

بردار جهت c به صورت $\frac{1}{\sqrt{30}}(-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$ است.

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

راه حل اول: اگر O مبدأ مختصات باشد آن گاه مطابق فرض داریم:

$$\begin{aligned} \vec{AM} = 2\vec{MB} &\Rightarrow (\vec{OM} - \vec{OA}) = 2(\vec{OB} - \vec{OM}) \\ \Rightarrow 3\vec{OM} &= \vec{OA} + 2\vec{OB} \\ \Rightarrow \vec{OM} &= \frac{1}{3}(\vec{OA} + 2\vec{OB}) = \frac{1}{3}((1, -3, -1) + (2, 0, 4)) \\ &= \frac{1}{3}(3, -3, 3) = (1, -1, 1) \end{aligned}$$

راه حل دوم: اگر در نظر بگیریم $M = (x, y, z)$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \vec{AM} = 2\vec{MB} &\Rightarrow (x - 1, y + 3, z + 1) = 2(1 - x, -y, 2 - z) \\ \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 - 2x, & \Rightarrow x = 1 \\ y + 3 = -2y, & \Rightarrow y = -1 \\ z + 1 = 4 - 2z, & \Rightarrow z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو بردار a و b را به صورت $a = (x, y, 2z)$ و $b = (2, 1, \frac{1}{4})$ تعریف می کنیم.

طبق نامساوی کشی - شوارتس داریم:

$$\begin{aligned} |a \cdot b| &\leq |a| |b| \Rightarrow (2x + y + z)^2 \leq (x^2 + y^2 + 4z^2) \left(4 + 1 + \frac{1}{4}\right) \\ \Rightarrow 5^2 &\leq (x^2 + y^2 + 4z^2) \times \frac{21}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 + 4z^2 \geq \frac{100}{21} \end{aligned}$$

۲۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ پس $\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BC}$ داریم:

$$\vec{AB} = (1, 3, -1) - (-1, -1, 3) = (2, 4, -4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

۲۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر دو بردار غیرصفر a و b بر هم عمود باشند، آن‌گاه طول دو بردار $a + b$ و $a - b$ با هم برابر است و بالعکس، لذا داریم:

$$|a + b| = |a - b| \Rightarrow a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow (3, m + 2, 6) \cdot (m, 2, -4) = 0$$

$$\Rightarrow 3m + (2m + 4) - 24 = 0 \Rightarrow 5m = 20 \Rightarrow m = 4$$

۲۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$ و $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ داریم:

$$\vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{AB} \Rightarrow 4(\vec{OM} - \vec{OA}) = -3(\vec{OB} - \vec{OA}) \Rightarrow$$

$$4\vec{OM} - 4\vec{OA} = -3\vec{OB} + 3\vec{OA} \Rightarrow 4\vec{OM} = -3\vec{OB} + 7\vec{OA} \Rightarrow$$

$$4\vec{OM} = -3(-i + 5j + 4k) + 7(2i + j) = 24i - 15j - 12k \Rightarrow \vec{OM} = 6i - 2j - 3k$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{j}}{|\vec{OM}| |\vec{j}|} = \frac{-2}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = -\frac{2}{7}$$

۲۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. حاصل ضرب داخلی دو بردار صفر است. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-6) + 0(m) + 3(4) = 0$ به‌ازای هر مقدار m دو بردار برهم عمودند.

۲۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. شرط عمود بودن دو بردار $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow -2 + 8 - 3m = 0 \Rightarrow m = 2$ لذا مجموع دو بردار چنین است.

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1, 6, -1) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1 + 36 + 1} = \sqrt{38}$$

۲۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b به صورت $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ است.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1(2) + (0)(1) + (2)(-4) = -10$$

در این پرسش

$$|\vec{b}|^2 = (-1)^2 + (2)^2 = 5$$

لذا تصویر مورد نظر $-2(-i + 2k)$ یا به صورت $(2, 0, -4)$ است.

۳۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اندازه‌ی تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b برابر است با:

$$|a'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|-12 - 2 - 21|}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{35}{7} = 5$$

۳۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $p \times q = 50 = 5 \times 10 = 5 \times \binom{5}{2} \Rightarrow P = 5$

$$k_p \text{ در } r \text{ طول} = \binom{p}{r} \frac{(r-1)!}{2} \Rightarrow \binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$$

۳۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. درجات رئوس گراف ساده و همبند اعداد $a, b, c, 1, 3, 4$ است.

پس تعداد رئوس $p = 6$ است. از طرفی $q = \frac{3}{p} p$ پس $q = 9$ بوده و بنابراین $\sum \deg = 2q = 18$ می‌باشد. پس:

$$4 + 3 + 1 + a + b + c = 18 \Rightarrow a + b + c = 10$$

با توجه به این که $p = 6$ است، حداکثر درجه‌ی یک رأس برابر $5 = p - 1$ می‌باشد. حالات زیر متصور است:

۱, ۱, ۳, ۴, ۴, ۵: دنباله درجات $\Rightarrow 10 = 1 + 4 + 5$: حالت اول حذف

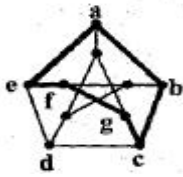
با توجه به قانون هاول حکیمی: این گراف قابل رسم نیست. $\Rightarrow 0, 0, 2, 3, 3 \Rightarrow 1, 1, 3, 4, 5$

$\Rightarrow 1, 2, 3, 3, 4, 5$: دنباله درجات $10 = 2 + 3 + 5$: حالت دوم

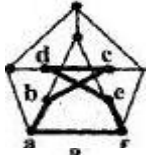
$\Rightarrow 3, 3, 3, 4$: حالت سوم $\Rightarrow \{a, b, c\} = \{4, 3, 3\}$

می‌دانیم در یک مجموعه تکرار عضو جایز نیست و عضوی که چند بار تکرار شده باشد را باید فقط یک بار بنویسیم. بنابراین مجموعه‌ی $\{4, 3, 3\}$ را به عنوان جواب نمی‌پذیریم.

۳۳- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. دو نوع دور به طول ۶ قابل رسم است. دورهایی که یکی از رأس های بیرونی را نپوشاند مانند دور $abegfea$ که به ازای هر رأس بیرونی یک دور به این صورت داریم. لذا جمعاً ۵ دور به این صورت داریم.

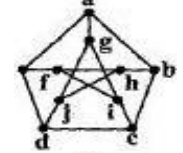


دورهایی که یکی از رأس های درونی را نپوشاند مانند دور $abcdefa$ که به ازای هر رأس درونی یک دور به این صورت داریم. لذا جمعاً ۵ دور نیز به این صورت داریم. پس جمعاً ۱۰ دور به طول ۶ داریم. البته اگر کمی زیرک باشید متوجه می شوید الگوی بالایی و پایینی در واقع یکی است و اینکه سه یال متوالی از بیرون و یک یال از درون انتخاب شود یا بالعکس سرانجام تفاوتی ندارد. می توان گفت از الگوی بالایی ۱۰ دور داریم.



نکته: گراف پترسن دارای ۱۲ دور به طول ۶، ۱۵ دور به طول ۸ و ۲۰ دور به طول ۹ است و دورهای به طول ۳، ۴، ۷ و ۱۰ را ندارد.

مثلاً دورهای به طول ۹ در گراف پترسن به صورت زیر قابل محاسبه است:

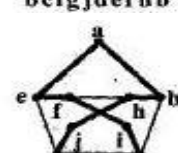


گراف پترسن ۳- منتظم مرتبه ی ۱۰ است. دوری به طول ۹ شامل ۹ رأس متمایز است. لذا دور مورد نظر باید از یکی از رئوس نگذرد. این کار به یکی از دو صورت زیر امکان پذیر است:



(۱) رأس مورد نظر از بیرون از گراف انتخاب شود.

حال دورهای به طول ۹ این گراف را می شماریم که کاری آسان تر است. ابتدا رأس a و یالهایش را حذف می کنیم. در این حالت ۲ دور مقابل قابل تولید است (برای رسم دورهای همپلتنی این گراف، رأس های درجه ی ۲، هر دو یالشان را پررنگ می کنیم چون حتماً باید در دور حضور داشته باشند).



حال این رأس خارجی هر کدام از ۵ رأس می تواند باشد. پس جمعاً ۱۰ دور به این صورت موجود است.

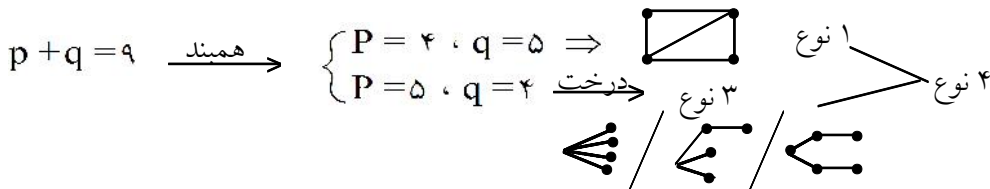
(۲) رأس مورد نظر از درون گراف انتخاب شود.

باز هم ۲ دور قابل تولید است.

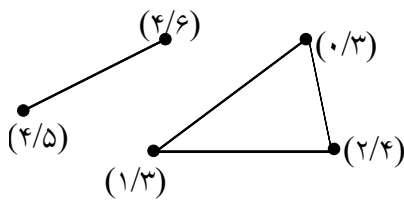
حال این رأس داخلی هر کدام از رئوس می تواند باشد. ابتدا رأس g و یالهایش را حذف می کنیم. پس ۱۰ دور نیز به این صورت قابل رسم است. لذا جمعاً ۲۰ دور به طول ۹ داریم.

در واقع در اینجا هم می توان گفت که هر دو الگوی سمت راست و هر دو الگوی سمت چپ نیز سرانجام یکی هستند و از الگوی یکسانی پیروی می کنند و از هر کدام نیز ۱۰ تا دور داریم.

۳۴- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.



۳۵- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. گراف مفروض دارای ۵ یال است. مجموع درجه ها دو برابر تعداد یالها است، یعنی مجموع درجه ها ۱۰ می باشد.



۳۶- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. در گراف بازه‌ها هر یال دو بازه غیر جدا از هم را به هم وصل می‌کند. با رسم شکل تعداد یال‌ها برابر ۴ می‌باشد.

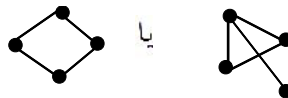
۳۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. در گراف کامل از مرتبه P از رأس به $P-1$ رأس دیگر وصل می‌شود یعنی هر رأس از درجه $P-1$ است لذا مجموع رأس‌های گراف کامل از مرتبه ۷ برابر $7 \times 6 = 42$

۳۸- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. شکل ساده شده ی گزینه‌ها به صورت زیر است:

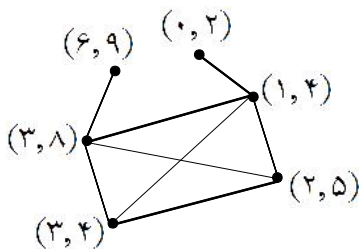


۳۹- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$P+q=8 \rightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=4 \end{cases}$$



$$k_4 = \binom{4}{2} = 6 \Rightarrow 6 - 4 = 2$$

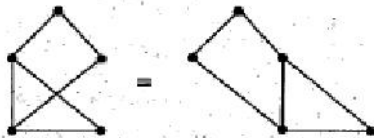


۴۰- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. یک مسیر به طول یک از $(0,2)$ به $(1,4)$ وجود دارد و از $(1,4)$ به $(3,4)$ تعداد ۵ مسیر وجود دارد پس تعداد کل مسیرها برابر است با ۵.

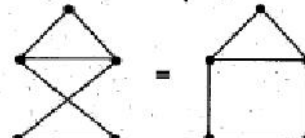
۴۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.



تذکر:



گزینه ی ۴: تغییر یافته ی گزینه ی ۱ است.



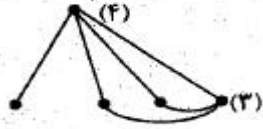
گزینه ی ۱:

دو گراف که از همه لحاظ مانند هم هستند و فقط شکل ظاهری آنها تفاوت دارد را یکریخت می‌نامند. اگر رئوس دو گراف نام‌گذاری شده باشند، یکریختی به معنای یکسان بودن کلیه ی رئوس و یال‌ها می‌باشد، اما اگر رئوس گراف نام‌گذاری نشده باشند، می‌توان هر دو گراف یکریخت را به گونه‌ای نام‌گذاری کرد که تمام یال‌ها و رئوس‌شان یکسان شوند. مثلاً گراف‌های زیر یکریخت می‌باشند:



در واقع گراف‌های یکریخت با یک تغییر شکل هندسی ظاهری به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

۴۲- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم در یک گراف ساده اولاً درجه هر رأس کم تر از عدد مرتبه گراف است. ثانیاً تعداد رأس ها با درجه فرد یک عدد زوج است لذا ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵ مورد قبول است.



۴۳- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه ی ۱: در این دنباله ی درجات، ما ۲ رأس از درجه ی ۱ - P داریم. در نتیجه باید $\delta \geq 2$ باشد در صورتی که در این جا $\delta = 1$ است.

گزینه ی ۳: تعداد رئوس درجه ی فرد، باید زوج باشد.

گزینه ی ۲: تمام شروط لازم رعایت شده است، اما پس از رسم رأس درجه ی (۴) و رسم اولین رأس درجه ی ۳، تعداد رئوس درجه ی (۱) با دنباله ی درجه ی موجود تطابق ندارد.

با توجه به این که هنوز رأس درجه ی (۳) دوم را رسم نکرده ایم، تعداد رئوس درجه ی (۱) باقی مانده یکتا است. ضمن آن که تنها راسی که می تواند درجه ی (۱) را در دنباله تولید کند، رأس با درجه ی (۱) است که در صورت متصل شدن به ۳ رأس باقی مانده، دنباله ی درجات (۴, ۴, ۳, ۳, ۲) خواهد شد.

۴۴- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. برای آن که $\deg(a) = 4$ باشد، باید از بین ۵ رأس دیگر ۴ تا را انتخاب کنیم و به a

وصل کنیم $\binom{5}{4}$ و حالا از بین ۱۰ یالی که می توان بین ۵ رأس دیگر ساخت باید ۲ تا را انتخاب کنیم که با ۴ تا یالی که از a می گذرد داشته باشیم: $q = 6$ ، لذا چون این دو عمل مستقل از هم است بنابراین اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \text{جواب نهایی} = \binom{5}{4} \binom{10}{2} = 225$$

نکته: اگر هم برای اندازه ی گراف و هم برای درجه ی رئوس شرط تعیین شده بود، ابتدا درجه ی رئوس را انتخاب می کنیم و سپس شرط اندازه را بر گراف اعمال می کنیم.

۴۵- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\binom{5}{5} \times \frac{(5-1)!}{2} = 12$$

$$\binom{P}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

نکته: تعداد دور به طول m در گراف کامل از مرتبه ی P برابر است با

۴۶- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$t = 2/2 + 1/5 = 3/5 \text{ s} \Rightarrow t_{\text{اوج}} = \frac{V_y}{g} \Rightarrow 3/5 = \frac{V_y}{10} \Rightarrow V_y = 37 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

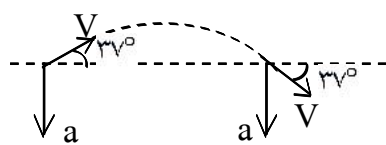
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_y t \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \times 10 \times (2/2)^2 + 37 \times 2/2 = 57/2 \text{ m}$$

۴۷- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t-4)\vec{i} + (8t-8)\vec{j} \Rightarrow \vec{v}(t=.) = -4\vec{i} - 8\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} + 8\vec{j} = \vec{a}(t=.)$$

با رسم بردارهای فوق روی محورهای مختصات دکارتی، متوجه می شویم که این دو بردار خلاف جهت یکدیگرند و با هم زاویه ی 180° می سازند. $\vec{a} = -\vec{v}$



۴۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. به دلیل نبود مقاومت هوا وقتی گلوله به ارتفاع اولیه خود می رسد همان سرعت اولیه خود را دارد که مولفه ی قائم آن قرینه شده است. $\Delta\theta = (90 + 37) - (90 - 37) \Rightarrow \Delta\theta = 74$

۴۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{r} = 20t^2\vec{i} + (-5t^3)\vec{j} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 40t\vec{i} + (-15t^2)\vec{j}$$

$$\vec{V}(t=2) = 40(2)\vec{i} + (15 \times 2^2)\vec{j} = 80\vec{i} + (-60)\vec{j} = 80\vec{i} - 60\vec{j}$$

۵۰- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$V_y = gt + V_{y0} \Rightarrow \begin{cases} V_{1y} = -gt + V_{y0} = -10 \times 1 + 20 = 10 \text{ m/s} \\ V_{2y} = -gt_2 + V_{y0} = -10 \times 4 + 20 = -20 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\bar{V}_y = \frac{V_{1y} + V_{2y}}{2} = -5 \text{ m/s} \Rightarrow |\bar{V}_y| = 5 \text{ m/s}$$

۵۱- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{r} = (t^3 + 2t)\vec{i} - 4t^2\vec{j} \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (3t^2 + 2)\vec{i} - 8t\vec{j}$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 = 2\vec{i} \\ t_2 = 2\text{s} \Rightarrow \vec{V}_2 = 14\vec{i} - 16\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{14\vec{i} - 16\vec{j} - (2\vec{i})}{2 - 0} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$$

۵۲- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{r} = (t^2 - 2t)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}t^3 - t^2\right)\vec{j} \rightarrow \vec{V} = (2t - 2)\vec{i} + (t^2 - 2t)\vec{j}$$

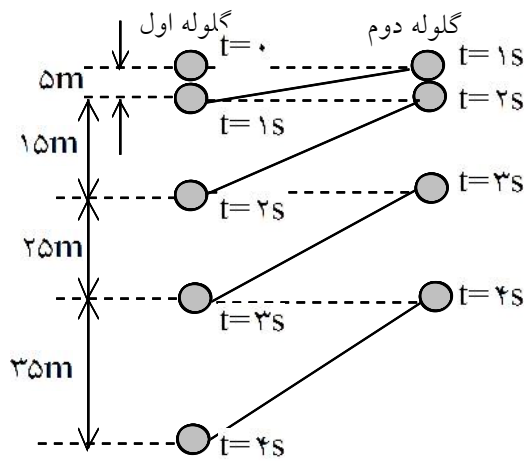
$$\vec{a} = 2\vec{i} + (2t - 2)\vec{j} \rightarrow 2t - 2 = 0 \rightarrow t = 1$$

شتاب هنگامی حداقل است که $a_y = 0$ باشد.

$$\vec{V}_{t=1} = (2 \times 1 - 2)\vec{i} + (1 - 2)\vec{j} \rightarrow \vec{V}_{t=1} = -\vec{j}$$

زاویه ی بین \vec{V} و \vec{a} در $t = 1$ برابر 90° درجه است.

۵۳- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.



$$\Delta y - \frac{1}{2}gt^2 + V_{y,t}t \Rightarrow \begin{cases} 10 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 2s \\ 10 - 35 = \frac{1}{2} \times 10 \times t'^2 \Rightarrow t' = 3s \end{cases} \Rightarrow \Delta t = 1s$$

روش دوم: همانطور که مشاهده می کنید، گلوله ی اول در ثانیه ی چهارم $35m$ مسیر را طی می کند. در نتیجه اگر گلوله ی دوم را یک ثانیه دیرتر رها کنیم، در لحظه ی $t = 4s$ گلوله ی اول به سطح زمین رسیده و گلوله ی دوم $45m$ مسیر را پیموده است و فاصله ی آنها $35m$ خواهد شد.

۵۴- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t} = \frac{(17 - 2)\vec{i} + (10 - (-5))\vec{j}}{5}$$

$$\vec{a} = \frac{15\sqrt{2}}{5} = 3\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

۵۵- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(V_x = \frac{dx}{dt} = 3 - 2t \xrightarrow{t=1s} V_x = 93 - 2 \right) \frac{m}{s} = 1 \frac{m}{s}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = t \xrightarrow{t=1s} V_y = 1 \frac{m}{s}$$

$$\tan \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{1}{1} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

اگر زاویه ی مورد نظر را α فرض کنیم، خواهیم داشت:

۵۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} x &= 20t \rightarrow t = \frac{x}{20} \\ y &= -5t^2 + 20\sqrt{3}t \end{aligned} \right\} \Rightarrow -5\left(\frac{x}{20}\right)^2 + 20\sqrt{3}\left(\frac{x}{20}\right) = -\frac{x^2}{80} + \sqrt{3}x$$

۵۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x = \int v dt = (10t + x_0) \vec{i} + (-5t^2 + 20t + y_0) \vec{j}$$

$$x_0 = y_0 = 0$$

$$t = 2s \rightarrow x = 20 \vec{i} + (-20 + 40) \vec{j} = 20 \vec{i} + 20 \vec{j} \Rightarrow V = 10 \vec{i} + 0 \vec{j}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{V}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{V}|} = \frac{10 \times 20}{(\sqrt{10^2}) \times (\sqrt{20^2 + 20^2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

۵۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. روش اول: چون متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، پس:

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } t} \vec{v} = t\vec{i} + 2t\vec{j}$$

چون حرکت از مبدأ مختصات شروع شده. پس:

$$\vec{v} = t\vec{i} + 2t\vec{j} \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } t} \vec{r} = \frac{1}{2}t^2 \vec{i} + t^2 \vec{j}$$

$$t = 4s \text{ در لحظه } \vec{r} = 8\vec{i} + 16\vec{j}$$

روش دوم: چون حرکت با شتاب ثابت است، می توان از رابطه ی حرکت به صورت برداری استفاده کرد، یعنی:

$$\vec{r} = \frac{1}{2} a t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

با توجه به اطلاعات تست، \vec{v}_0 و \vec{r}_0 صفر می باشند.

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2} (\vec{i} + 2\vec{j}) t^2 \Rightarrow \vec{r}(4) = \frac{1}{2} (\vec{i} + 2\vec{j}) (4)^2 \Rightarrow \vec{r}(4) = 8\vec{i} + 16\vec{j}$$

۵۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$R = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{g} \Rightarrow 80 = \frac{100 \sin^2 \alpha}{10} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$H = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{100 \times \frac{1}{2}}{20} m = 2.5 m$$

۶۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\vec{r} = \frac{3}{2} t^2 \vec{i} - 2t^2 \vec{j} \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3t\vec{i} - 4t\vec{j}; |\vec{V}| = \sqrt{9t^2 + 16t^2} = 20 \Rightarrow t = 4s$$

$$t = 4s \Rightarrow \vec{r} = 24\vec{i} - 32\vec{j} \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{24^2 + (-32)^2} = 40 m$$