

۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برقراری ارتباط عالم برزخ با دنیا پس از مرگ، مربوط به آثار ما تاخر اعمال انسان و باز بودن پرونده‌ی عمل به واسطه‌ی این آثار است. بنابراین آیه‌ی شریفه‌ی (انا نحن نحیی الموتی و نکتب ما قدّموا و ءآثارهم) درست است. فعالیت آگاهانه‌ی روح در عالم برزخ، از «توقی» روح برداشت می‌شود. بنابراین آیه‌ی شریفه‌ی (الذین توفاهم الملائکة طیبین یقولون سلام علیکم) پاسخ درست است.

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. آنجا که احساس تشنگی با آب برطرف می‌شود و آنجا که «مصلح» و «مفسد» پاداشی درخور صلاح و فساد دریافت می‌کنند به ترتیب ضرورت معاد در پرتو حکمت و عدل مفهوم می‌گردد.

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
قرآن در آیه ۹۷ سوره مبارکه نساء می‌فرماید: «إِنَّ الذِّینَ تَوَفَّاهُمُ الْمَلَائِکَةُ ظَالِمِیْ اَنْفُسِهِمْ قَالُوا فِیْمَ کُنتُمْ قَالُوا کُنَّا مُسْتَضَعِفِیْنَ فِی الْاَرْضِ قَالُوا اَلَمْ تَكُنْ اَرْضٌ لِّلّٰهِ وَّاسِعَةً فَتُهَاجِرُوا فِیْهَا فَاُولٰٓئِکَ مَا وَاھُمْ جَھَنَّمُ و سَاءَتْ مَصِیْرًا».

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حقیقت وجود انسان، نفس و روح اوست و این حقیقت هنگام مرگ نابود نمی‌شود بلکه توسط فرشته مرگ به تمام و کمال دریافت می‌گردد و آیه شریفه (۱ یَحْسَبُ الْاِنْسَانُ اَلَنْ نَجْمَعَ عِظَامَهُ ...) حاکی از معاد جسمانی می‌باشد.

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح می‌باشد. آیه‌ی شریفه اشاره به امکان معاد جسمانی و آفرینش مجدد جسم با توجه به نظام مرگ و زندگی دارد که در گزینه‌ی ۴ به این امر مستقیماً اشاره شده است.

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
از آیه شریفه «اَفَحَسِبْتُمْ اَمَّا خَلَقْنَاکُمْ عَبَثًا وَاَکُم اِلَیْنَا لَا تُرْجَعُوْنَ» به ضرورت معاد در پرتو حکمت الهی پی می‌بریم.

۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. شخصی از امام کاظم (ع) درباره‌ی وضع مؤمنان پس از مرگ پرسید: «آیا مؤمن به دیدار خانواده‌ی خویش می‌آید؟ فرمود: آری، پرسید: چه قدر؟ فرمود: برحسب مقدار فضیلت‌هایش، برخی از آنان هر روز و برخی هر دو روز و برخی هر سه روز و کم‌ترین آنان هر جمعه.»

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آیه‌ی شریفه‌ی «ما خَلَقْنَا السَّمَاءَ وَاْلاَرْضَ و ما بَیْنَهُمَا باطِلًا» بر ضرورت معاد در پرتو حکمت الهی دلالت می‌کنند.

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سرنوشت انسان در عالم دنیا تعیین می‌شود، اعمالی که انسان در زمان حیات خود انجام می‌دهد، دارای آثاری هستند که برخی از این آثار بعد از حیات او هم باقی می‌ماند. آثار ما تاخر می‌نامند، اعمال و آثاری که پیش از مرگ در پرونده اعمال فرد ثبت شده است «ما تقدم» می‌گویند و آیه «و نکتب ما قدّموا و آثارهم» از این نوع آثار ما تقدم است.

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
قرآن کریم لازمه عبث نبودن زندگی انسان را در بازگشت او به سوی خدا در جهان ابدی می‌داند که نشانه‌ای بر ضرورت معاد می‌باشد و آیه «ما خَلَقْنَا السَّمَاوَاتِ وَاْلاَرْضَ و ما بَیْنَهُمَا اِلَّا بِالْحَقِّ ...» حاکی از آن است.

- ۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
- قرآن در آیه ۸۷ سوره مبارکه نساء می‌فرماید: «اللَّهُ لَا إِلَهَ إِلَّا هُوَ يُجْمَعُكُمْ إِلَى يَوْمِ الْقِيَامَةِ...»: «خداوند کسی است که هیچ معبودی جز او نیست، به یقین در روز رستاخیز که هیچ شکی در آن نیست شما را گرد خواهد آورد، راستگوتر از خدا در سخن کیست.» پس از این آیه سنت تغییرناپذیر اراده خداوند مفهوم می‌گردد.
- ۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عدم امکان مجازات جنایت‌کاران آتش‌افروز که در طول تاریخ، بی‌گناهان را به آتش خشم برخاسته از استکبار خود، به توده‌هایی از خاکستر تبدیل کرده‌اند، به ضرورت معاد در پرتو عدل الهی پی می‌بریم.
- ۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. آیه شریفه «إِنَّ الَّذِينَ تَوَفَّاهُمُ الْمَلَائِكَةُ ظَالِمِي أَنفُسِهِمْ قَالُوا فِيمَ كُنْتُمْ قَالُوا كُنَّا مُسْتَضْعَفِينَ فِي الْأَرْضِ قَالُوا لِمَ تَكُونُ أَرْضَ اللَّهِ وَاسِعَةً فَتُهَاجِرُوا فِيهَا...» حاکی از گفتگو فرشتگان مرگ در عالم برزخ با کسانی که به خود ستم کرده‌اند و هجرت نکرده‌اند می‌باشد و آیه «وَقَالُوا الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي صَدَقَنَا وَعْدَهُ وَأَوْرَثَنَا الْأَرْضَ» در عالم قیامت اتفاق می‌افتد.
- ۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. آیه شریفه «أَيُحْسَبُ الْإِنْسَانُ أَنْ نَجْمَعُ عِظَامَهُ» موضوع امکان معاد با توجه به قدرت نامحدود خداوند مفهوم می‌گردد.
- ۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. پس از مرگ، گرچه فعالیت‌های حیاتی بدن متوقف می‌شود، اما فرشتگان حقیقت وجود انسان را که همان روح است، «توقی» می‌کنند، یعنی آن‌را به‌طور تمام و کمال دریافت می‌نمایند. بنابراین گرچه بدن حیات خود را از دست می‌دهد، اما روح هم‌چنان به فعالیت آگاهانه‌ی خویش ادامه می‌دهد.

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: دو بردار u و v بر هم عمودند، اگر و تنها اگر $u \cdot v = 0$ چون $a - b$ و $a + 2b$ بر هم عمودند، طبق نکته‌ی فوق داریم:

$$(2a - b) \cdot (a + 2b) = 0 \Rightarrow 2|a|^2 + 4a \cdot b - b \cdot a - 2|b|^2 = 0 \Rightarrow 2|a|^2 + 3a \cdot b - 2|b|^2 = 0$$

$$\xrightarrow{|a|=|b|} 3a \cdot b = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0 \Rightarrow a \perp b$$

پس زاویه‌ی بین a و b برابر 90° است.

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: سه نقطه‌ی A ، B و C روی یک خط راست واقع می‌شوند، هرگاه $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$. نکته: دو بردار u و v موازی‌اند، هرگاه عدد حقیقی غیر صفر r وجود داشته باشد که $u = rv$.

$$A(-2, 4, 4), B(a, b, 0), C(0, 1, 2)$$

$$\begin{cases} \overline{AB} = (a + 2, b - 4, -4) \\ \overline{AC} = (2, -3, -2) \end{cases}$$

حال با استفاده از نکته‌ی فوق، داریم:

$$\overline{AB} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \frac{a+2}{2} = \frac{b-4}{-3} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2=4 \Rightarrow a=2 \\ b-4=-6 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

بنابراین: $a + b = 0$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$b \text{ بر داری } a \text{ نسبت به بردار } a = \frac{a \cdot b}{|b|^2} = \frac{2(-2 - 1 - 6)}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$= -\frac{5}{3}(1, 1, 2 - (2, -1, -3)) = (1, -2, -3)$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. طبق رابطه‌ی ضرب سه‌گانه $(a \times (b \times c)) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ ، هر یک از گزینه‌ها یک ضرب سه‌گانه است که آن‌ها را می‌نویسیم:

$$(1) \quad b \times (a \times c) \quad (2) \quad c \times (a \times b) \quad (3) \quad a \times (b \times c) \quad (4) \quad b \times (c \times a)$$

بردار $a \times (b \times c)$ برداری است که بر a عمود است.

نکته: بردار $a \times b$ بر هر دو بردار a و b عمود است، در واقع بر صفحه‌ی شامل این دو بردار عمود است.

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین فرض را در b ضرب داخلی می‌کنیم.

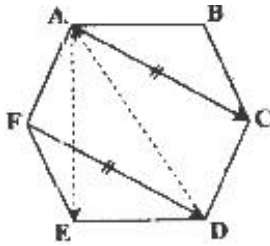
$$0 = b \cdot (2a \times b) = b \cdot (3c - a) = 3b \cdot c - b \cdot a \Rightarrow b \cdot a = 9$$

$$0 = a \cdot (2a \times b) = 3a \cdot c - |a|^2 \Rightarrow |a|^2 = 3a \cdot c$$

$$|a \times b|^2 + |b \cdot a|^2 = |a|^2 \times |b|^2 \Rightarrow |a \times b|^2 = |a|^2 - 81, \quad |2a \times b|^2 = |3c - a|^2$$

$$\Rightarrow 4(|a|^2 - 81) = 81 + |a|^2 - 6a \cdot c = 81 + |a|^2 - 2|a|^2 = 81 - |a|^2 \Rightarrow |a|^2 - 81 = 0 \Rightarrow |a| = 9$$

۲۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\text{عبارت} = \vec{AC} + \underbrace{\vec{AE} + \vec{DA}}_{\vec{DE}} + \vec{BF}$$

$$\vec{AC} = \vec{FD}$$

$$\text{عبارت} = \underbrace{\vec{FD} + \vec{DE}}_{\vec{FE}} + \vec{BF} = \vec{BF} + \vec{FE} = \vec{BE}$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: اگر a و b دو بردار با زاویه‌ی بین θ باشند، داریم:

$$a \cdot b = b \cdot a = |a||b| \cos \theta$$

$$|a \times b| = |b \times a| = |a||b| \sin \theta$$

$$|a - b|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \cos \theta$$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} a \cdot b = b \cdot a = |a||b| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ |a \times b| = |b \times a| = |a||b| \sin 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$|(a \cdot b)(a \times b)|a - |(b \cdot a)(b \times a)|b = |(a \cdot b)(a \times b)|(a - b) \Rightarrow |(a \cdot b)(a \times b)|a - |(b \cdot a)(b \times a)|b = |(a \cdot b)(a \times b)||a - b| \quad (*)$$

حال مقدار $|a - b|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|a - b|^2 = a^2 + b^2 - 2|a||b| \cos 60^\circ = 1 + 1 - 1 = 1 \Rightarrow |a - b| = 1$$

با جای‌گذاری این مقدار در (*) داریم:

$$|(a \cdot b)(a \times b)||a - b| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۲۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{فاصله از محور } y \text{ ها: } \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \\ \text{فاصله از محور } z \text{ ها: } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}| \quad \begin{cases} \vec{OA} = (1, -1, 3) \\ \vec{OB} = (0, 2, 1) \end{cases}$$

۲۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7, -1, 2)$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \sqrt{49 + 1 + 4} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{\sqrt{9 \times 6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

۲۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, -4, 2) \rightarrow A'(0, -4, 2) \\ B(4, 5, -6) \rightarrow B'(-4, -5, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{A'B'} = (-4, -5, -6) - (0, -4, 2) = (-4, -1, -8)$$

۲۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(2a - b) \times (a + 2b) = \overbrace{2a \times a}^O + 6a \times b - b \times a - \overbrace{2b \times b}^O = 2(a \times b) = (7, -7, 14)$$

$$\Rightarrow a - b = (1, -1, 2)$$

$$|a \times b| = |a||b| \cdot \sin \theta \Rightarrow \sqrt{1 + 1 + 4} = 2\sqrt{2} \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta} = 60^\circ \\ \hat{\theta} = 120^\circ \end{cases}$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (2, -1, 3) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (-13, -2, 8) \\ \vec{b} &= (0, 4, 1) \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{169 + 4 + 64}} = \frac{-2}{\sqrt{237}}$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حجم حاصل $V = |a \cdot (b \times c)|$ است.

$$V = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

پس حجم مطلوب برابر صفر است یعنی سه بردار در یک صفحه هستند و متوازی‌السطوح ساخته نمی‌شود.

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \Rightarrow (a + b) \cdot (a + b) = (a) \cdot (a) + (b) \cdot (b) \Rightarrow a \cdot b + b \cdot a = 0$$

پس $a \cdot b = 0$ ، در نتیجه دو بردار a و b عمود بر هم‌اند.

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

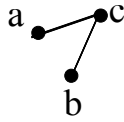
$$\begin{aligned} b + c &= (-1, 2, 4) \\ a &= (1, 3, -2) \end{aligned} \Rightarrow \text{تصویر مطلوب} = \frac{-1 + 6 - 8}{1 + 4 + 16} (-1, 2, 4) = \frac{1}{7} (-1, 2, 4)$$

۳۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم درایه‌های روی قطر اصلی A^2 همان درجه‌های رأس‌ها هستند. بنابراین مجموع درایه‌های A^2 می‌شود مجموع درجه‌ها و چون گراف کامل است مجموع درجه‌ها در گراف کامل P رأسی برابر است با $p(p-1)$.

$p(p-1)$ یعنی حاصل ضرب دو عدد پشت سرهم. در میان گزینه‌ها تنها ۷۲ چنین خاصیتی دارد. $72 = 8 \times 9$

۳۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$2q = 4 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow 2q = 4 \Rightarrow \text{تعداد یک‌ها}$$

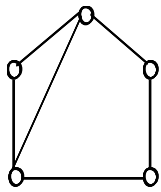


۳۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف دنباله درجات رئوس، تنها گزینه‌ی ۴ پذیرفته است، زیرا تعداد رئوس فرد زوج است، چون $P = 5$ حداکثر جمله ۴ می‌باشد و چون دارای ۱ جمله $P - 1$ می‌باشد، حداقل یک جمله درجه‌ی ۱ دارد.

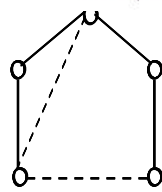
۳۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت همان درجه‌ی رئوس گراف است، پس مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2 همان $2q$ می‌باشد:

$$p = 7 \xrightarrow{\text{درخت}} q = 6 \Rightarrow 2q = 12$$

۳۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A^2 بیان‌گر درجه‌ی رئوس گراف A است. بنابراین با توجه به این که مرتبه‌ی گراف ۵ است، داریم: $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 = 72$



حذف ۲ یال



d_1, d_2, \dots, d_5 باید بتوانند رئوس گراف باشند. تنها ۵ عددی که بتوانند درجات رئوس گراف بوده و حاصل ضربی برابر ۷۲ داشته باشند، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳ هستند. (توجه کنید که همه‌ی این اعداد طبیعی باید کوچک‌تر از ۵ باشند.)

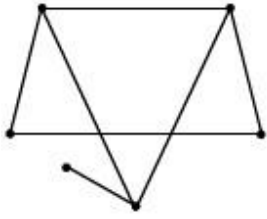
بدون رسم گراف هم می‌توانستیم به جواب برسیم. مجموع درجات رئوس این گراف $3+3+2+2+2=12$ است، بنابراین $q = \frac{12}{2} = 6$. از طرفی درخت مرتبه‌ی ۵، دارای ۴ یال است زیرا درخت $q = P - 1$. در نتیجه با حذف ۲ یال از ۶ یال گراف اولیه، درخت مرتبه‌ی ۵ حاصل می‌شود.

۳۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. گراف موجود در یک درخت است و در هر درخت $P = q + 1$ است.

$$7 + 5 + k = \frac{7 \times 1 + 5 \times 2 + k \times 3}{2} + 1 \Rightarrow 2k + 22 = 17 + 3k \Rightarrow k = 5$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

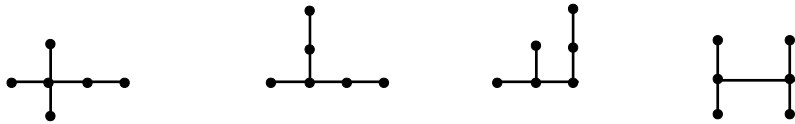
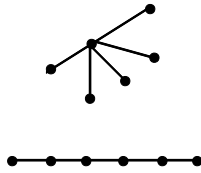
ماتریس مجاورت گراف مزبور $5 \times 5 = 25$ عضو دارد که تعداد درایه‌های ۱ در آن برابر مجموعه درجه‌های رأس‌های آن است یعنی: $10 = 5 \times 2$ ، پس: $15 = 25 - 10$ عضو صفر دارد.



۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. درایه‌های قطری ماتریس A^2 متناظر با درجه هر یک از رأس‌ها است.
پس کافی است مجموع درجه رأس‌ها تعیین شود.

$$3 + 3 + 3 + 1 + 2 + 2 = 14$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد نوع درخت‌های از مرتبه ۶ برابر ۶ می‌باشد.



۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازه‌ی یک درخت از مرتبه‌ی p برابر است با $q = p - 1$. هم‌چنین تعداد صفرهای ماتریس مجاورت یک گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q برابر است با $p^2 - 2q$ ، داریم:

$$p = 5 \xrightarrow{\text{درخت}} q = 4$$

$$\text{تعداد صفرها} = 5^2 - 2 \times 4 = 25 - 8 = 17$$

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند مربوط به درخت باشند، چون باید بیش از یک رأس از درجه‌ی ۱ داشته باشند.
گزینه ۲ غلط است، چون تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، عددی فرد است.
گزینه ۳ با توجه به نمودار روبه‌رو، مربوط به درخت است.



تذکر: در هر درخت، اگر $p > 1$ باشد، حداقل دو رأس از درجه‌ی ۱ وجود دارد.

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گراف همبند G که فاقد دور باشد، درخت است. در هر درخت $q = p - 1$ است. اکنون می‌توانیم بنویسیم (G روی هم دارای $6 + m + 3$ رأس است):

$$\sum \deg v_i = 2q \Rightarrow 6(1) + 3(2) + m(3) = 2(p - 1) \Rightarrow 12 + 3m = 2(9 + m - 1)$$

$$\Rightarrow 12 + 3m = 16 + 2m \Rightarrow m = 4$$

پس G دارای $13 = 4 + 6 + 3$ رأس و $q = 13 - 1 = 12$ یال است، در نتیجه $p + q = 25$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. درایه‌های قطر اصلی A^2 همان درجات رأس‌های گراف G می‌باشند، پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A^2 برابر $2q$ می‌باشد، از طرفی تعداد یک‌های ماتریس A نیز برابر است با $2q$ ، پس داریم:

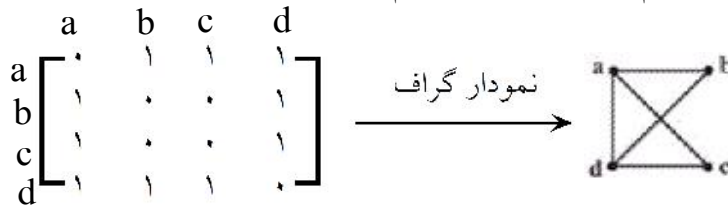
$$\text{تعداد یک‌های ماتریس } A = 2q = 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 1 = 18$$

از طرفی تعداد درایه‌های قطر اصلی A^2 برابر ۶ است پس $p = 6$ در نتیجه داریم:

$$\text{تعداد صفرهای ماتریس } A = p^2 - 2q = 6^2 - 18 = 18$$

$$\text{تعداد صفرهای غیرواقع بر قطر اصلی } A = 18 - 6 = 12$$

۴۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. بهتر است نمودار گراف را با نام‌گذاری رأس‌ها، بکشیم.



همان‌گونه که می‌بینیم، این گراف همبند است و دارای دو دور به طول ۳ است (acda, abda) یعنی دور به طول فرد دارد. از آنجا که این گراف از مرتبه‌ی $P = 4$ است و دارای دوری به طول ۴ می‌باشد (acdba)، پس همیلتنی است. این گراف روی هم دارای ۳ دور است.

۴۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. تعداد یک‌ها در ماتریس مجاورت هر گراف ساده برابر $2q$ و تعداد صفرها برابر

$$\left. \begin{array}{l} 2q = 36 \\ p^2 - 2q = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow p^2 = 45 + 36 = 81 \Rightarrow p = 9$$

$2q - p^2$ است، بنابراین:

$$9r = 36 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow p + r = 9 + 4 = 13$$

از طرفی در گراف‌های منتظم $2q = Pr$ می‌باشد، بنابراین:

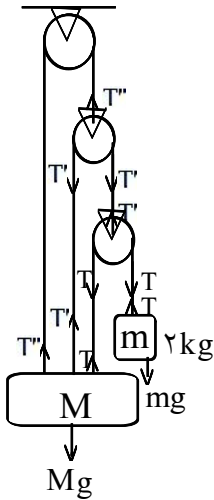
۴۶- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x = 6t + 3 \Rightarrow V_x = \frac{dx}{dt} = 6 \text{ m/s} \\ y = -3t^2 - 2t + 5 \Rightarrow V_y = \frac{dy}{dt} = -6t - 2 \Rightarrow V_{y,1} = -6 \times 1 - 2 = -8 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ m/s}$$

$$P = mV \Rightarrow P = 0.2 \times 10 = 2 \text{ kg.m/s}$$

۴۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$T = mg = 20 \text{ N}$$

$$T' = 2T + mg = 40 + 10 = 50 \text{ N}$$

$$T'' = 2T' + mg = 100 + 10 = 110 \text{ N}$$

$$T + T' + T'' = Mg \Rightarrow 20 + 50 + 110 = 10M \Rightarrow M = 18 \text{ kg}$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$m_1 g \sin \alpha = (30 \times 0.8) N = 24 N$$

$$m_2 g \sin \beta = (50 \times 0.6) N = 30 N$$

تأثیر دو نیروی $24 N$ و $30 N$ که به ترتیب به وزنه‌های m_1 و m_2 به طرف پایین تکیه‌گاه آن‌ها وارد می‌شود، موجب می‌گردد تا برای وزنه m_2 دستگاه، تمایل به حرکت به طرف پایین سطح شیب‌دار و برای وزنه m_1 دستگاه، تمایل به حرکت به طرف بالای سطح شیب‌دار ایجاد گردد، که این امر سبب بروز نیروی اصطکاک برای وزنه m_1 می‌شود. برای این‌که بفهمیم این اصطکاک، ایستایی و یا جنبشی است باید مشخص کنیم که دستگاه وزنه‌ها، ساکن می‌ماند و یا به حرکت درمی‌آید. برای این منظور باید اندازه بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی که می‌تواند بر وزنه m_1 وارد شود را حساب کنیم.

$$f_{s \max} = \mu_s m_1 g \cos \alpha = (0.5 \times 30 \times 10 \times 0.6) N = 9 N$$

چون $9 N + 24 N$ بزرگ‌تر از $30 N$ می‌شود، پس دستگاه وزنه‌ها، حرکت نمی‌کند و در آستانه حرکت هم قرار نمی‌گیرد، پس به وزنه m_1 دستگاه، نیروی اصطکاک ایستایی وارد می‌شود که اندازه این نیروی اصطکاک به طریق زیر محاسبه می‌گردد.

$$\sum F = 0 \Rightarrow \begin{cases} 30 N - T = 0 \\ T = 24 N + f_{s1} \end{cases} \Rightarrow 30 N = 24 N + f_{s1} \Rightarrow f_{s1} = 6 N$$

بنابراین اندازه نیروی سطح وارد بر وزنه m_1 ، برابر است با:

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha = (30 \times 10 \times 0.6) N = 18 N$$

$$R_1 = \sqrt{f_{s1}^2 + N_1^2} = \sqrt{6^2 + 18^2} N = 6\sqrt{10} N$$

۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\mu_s N = mg - F \sin 37^\circ \Rightarrow \mu_s (F \cos 37^\circ) = mg - F \sin 37^\circ \Rightarrow 0.5 (F \times 0.8)$$

$$= 0.5 \times 10 - F \times 0.6 \Rightarrow 0.4 F = 2 - 0.6 F \Rightarrow F = 2 N$$

۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

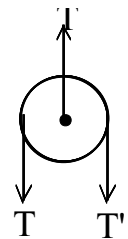
$$\sum F = ma \Rightarrow m_1 g + m_2 g - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3) a \Rightarrow 200 + 100 - 200 = 50 a \rightarrow a = 2 m/s^2$$

$$1 \text{ شکل} \rightarrow T' - 200 = 40 \Rightarrow T' = 240 N \rightarrow T = 2T' = 480 N$$

$$3 \text{ شکل} \rightarrow m_1 g - T' = m_1 a$$

$$200 - T_1 = 40 \rightarrow T_1 = 160 N$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{480}{160} = 3$$



۵۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$m = 500 \text{ گرم} = 0.5 \text{ kg}$$

$$\vec{P} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{P}}{m} \Rightarrow \vec{v} = \frac{15\hat{i} + (-5t + 20)\hat{j}}{0.5} \Rightarrow \vec{V} = 30\hat{i} + (-10t + 40)\hat{j}$$

$$t=1 \Rightarrow \vec{V} = 30\hat{i} + 30\hat{j} \Rightarrow |\vec{V}| = 30\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۵۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تکانه را در لحظه‌ی $t=2s$ حساب می‌کنیم.

$$t=2 \Rightarrow P = 2^2 \cdot \frac{1}{2} \times 2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow P = 3 \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$P = mV \Rightarrow m \cdot V = 3 \Rightarrow 0.5 \times V = 3 \Rightarrow V = 6 \frac{m}{s}$$

۵۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید فاصله تا مرکز زمین $\sqrt{2}$ برابر شود تا اندازه نیروی گرانش وارد بر جسم نصف شود

زیرا:

$$\frac{w'}{w} = \frac{g'}{g} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r}{r'} \Rightarrow r' = \sqrt{2}r$$

$$\Rightarrow R_e + h = \sqrt{2}R_e \Rightarrow h = (\sqrt{2} - 1)R_e$$

۵۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$F = ma = G \cdot \frac{mMc}{r^2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{G \cdot m \cdot Mc}{r_e^2} \cdot \frac{((n+1)r_e)^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow n = 1$$

$$W = mg \Rightarrow 600 = m \times 10 \Rightarrow m = 60 \text{ kg}$$

۵۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. جرم شخص را حساب می‌کنیم.

$$F - mg = ma \Rightarrow 720 - 600 = 60a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s}$$

در لحظه‌ی شروع حرکت، حرکت شتاب‌دار است.

۵۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مسئله را در دو حالت حل می‌کنیم (قبل از حذف نیرو و بعد از حذف نیرو) در مرحله

اول جرم مجهول به دست می‌آید و در مرحله دوم شتاب سیستم را حساب می‌کنیم. در مرحله اول چون سرعت ثابت

است برآیند نیروها صفر است:

$$M_2 g - f_k = 0 \rightarrow M_2 g = \mu_k \cdot N = \mu_k (F + M_1 g) \rightarrow 10 M_2 = 0.2(60 + 40) \rightarrow M_2 = 2 \text{ kg}$$

$$M_2 g - f_k = (M_1 + M_2)a \rightarrow 20 - 0.2 \times 40 = 6a \rightarrow a = 2$$

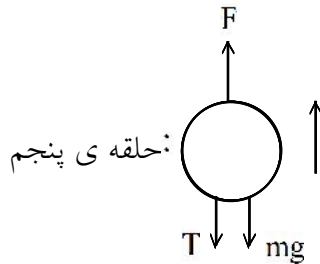
۵۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راستای حرکت همان راستای سرعت است و راستای سرعت هم همان راستای تکانه است، پس:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = 0\vec{i} + (-20)\vec{j} \Rightarrow \vec{F} = -20\vec{j}$$

باید در لحظه مورد نظر، تکانه در راستای افقی باشد یعنی ضریب \vec{j} در معادله تکانه باید صفر باشد، پس:

$$-20t + 30 = 0 \Rightarrow 20t = 30 \Rightarrow t = \frac{3}{2}s = 1.5s$$

۵۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



برای کل حلقه ها
$$\begin{cases} F - Mg = Ma \\ F - (5 \times 0.2) \times 10 = (5 \times 0.2) \times 2 \rightarrow F = 12N \end{cases}$$

برای حلقه ی پنجم
$$\begin{cases} F - mg - T = ma \\ 12 - 0.2 \times 10 - T = 0.2 \times 2 \rightarrow T = 9/6N \end{cases}$$

۵۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است (حرکت یکنواخت). سه نیرو به جسم وارد می شود: $50N$ افقی، $25N$ وزن و سومی نیروی حاصل از سطح شیب دار. بزرگی برآیند دو نیروی اول را حساب می کنیم:

$$F' = \sqrt{50^2 + 25^2} = \sqrt{25^2(2^2 + 1)} = 25\sqrt{5}N$$

برای این که برآیند نیروها صفر باشد باید نیروی حاصل از سطح شیب دار هم اندازه با \vec{F}' و در خلاف جهت آن باشد.

۶۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اندازه کشش نخ برابر $\frac{F}{3}$ ، یعنی 20 نیوتون است که به هریک از وزنه ها وارد می شود. و نیروی اصطکاک حاصل از اثر وزنه m_2 ، در سطح پایین، m_1 را به عقب می کشد و در سطح بالا، m_1 را به جلو، بنابراین نیروی اصطکاک حاصل از وزن m_1 و کشش نخ، در حرکت این وزنه موثر است. پس:

$$T - \mu_k m_1 g = m_1 a_1 \Rightarrow 20 - 0.5 \times 30 = 3a_1 \Rightarrow 5 = 3a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{5m}{3s}$$