

۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. زیرا این آیه‌ی شریفه با این فرموده‌ی پیامبر (ص) که فرمودند: هرکس سُنّت و روش نیکی را در جامعه جاری سازد، تا وقتی که در دنیا مردیم به آن سنت عمل می‌کنند، ثواب آن اعمال به حساب این شخص هم می‌گذارند.

شماره: ۳۳۳۸۵۱

۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. فرموده‌ی امام صادق (ع) بیانگر تأثیر اعمال دنیوی و قبل از مرگ انسان در زندگی برزخی اوست. به عبارت دیگر پس از مرگ، پرونده‌ی اعمال بسته نشده و متناسب با اعمال دنیوی، پیوسته بر آن افزوده می‌شود. آیه‌ی شریفه‌ی در گزینه‌ی (۳) نیز اشاره به آثار ما تأخر اعمال انسان دارد که بعد از مرگ بر پرونده‌ی اعمال او افزوده می‌شود.

شماره: ۸۱۳۴۳۱

۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. زیرا از آیه‌ی شریفه‌ی «إِنَّا نَحْنُ نُحْيِي الْمَوْتَىٰ وَنَكْتُبُ مَا قَدَّمُوا وَآثَارَهُمْ» دریافت می‌شود که آثار اعمال انسان در عالم برزخ برای او ثبت و ضبط می‌گردد و این امر مطابق کلام گهربار امام صادق (ع) است که فرمودند: «شش چیز است که مؤمن پس از مرگ نیز از آن‌ها بهره‌مند می‌شود: فرزند صالحی که برای او طلب مغفرت کند، کتاب قرآنی که از آن قرائت شود. چاه آبی که حفر کرده و به مردم آب می‌دهد درختی که کاشته است آبی که برای خیرات جای کرده و روش پسندیده‌ای که بنا نهاده و دیگران پس از وی آنرا ادامه می‌دهند.»

شماره: ۳۰۴۰۸۰

۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. زیرا محدودیت عمر انسان، در دریافت پاداش اعمال، بیان‌گر «ضرورت معاد در پرتو عدل الهی» و شوق و اشتیاق رفتن به دنبال پایان ناپذیرها و افول ناشدنی‌ها، حکایت‌گر «ضرورت معاد در پرتو حکمت الهی» می‌باشد.

شماره: ۳۰۴۰۵۵

۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. زیرا آیه‌ی شریفه‌ی «قُلْ يَحْيِيهَا الَّذِي أَنشَأَهَا أَوَّلَ مَرَّةٍ وَهُوَ بِكُلِّ خَلْقٍ عَلِيمٌ» در پاسخ به کسانی است که منکر معاد جسمانی بودند و بیان‌گر اثبات امکان معاد می‌باشد.

شماره: ۳۰۴۱۰۵

۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. زیرا آیه‌ی شریفه‌ی «وَضَرَبَ لَنَا مَثَلًا وَ نَسِيَ خَلْقَهُ وَقَالَ مَنْ يَحْيِي الْعِظَامَ وَ هِيَ رَمِيمٌ قُلْ يَحْيِيهَا الَّذِي...» مربوط است به امکان معاد، آفرینش مجدد جسم برای پیوستن روح منزّه از تجزیه و استهلاک به آن. باید توجه داشت که برخی از افراد می‌پذیرند که زندگی بدون معاد معنایی ندارد، اما در امکان چنین واقعه‌ی عظیمی در تردیدند یعنی امکان معاد جسمانی برای آن‌ها امری دشوار است قرآن کریم در آیات متعدد از جمله آیه‌ی مذکور، به امکان آفرینش جسم برای پیوستن به روح در آخرت اشاره کرده است و به سه گونه: پیدایش نخستین انسان، اشاره به قدرت نامحدود خداوند و اشاره به نظام مرگ و زندگی در طبیعت، به اثبات آفرینش مجدد جسم پرداخته است.

شماره: ۲۶۶۷۶۴

۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. پاسخ به این اشکال که بعید شمردن معاد جسمانی از سوی کسانی که مرگ را پایان زندگی تلقی می‌کنند آیه‌ی شریفه‌ی «يَخْرُجُ الْحَيُّ مِنَ الْمَيِّتِ وَ...» می‌باشد که اشاره به نظام مرگ و زندگی در طبیعت به عنوان یکی از نشانه‌های امکان معاد و معاد جسمانی دارد.

شماره: ۸۱۳۱۲۵

۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. زیرا از پیام آیه‌ی شریفه‌ی «النَّارُ يُعْرَضُونَ عَلَيْهَا غُدُوًّا وَعَشِيًّا، وَ يَوْمَ تَقُومُ السَّاعَةُ ادْخُلُوا آلَ فِرْعَوْنَ أَشَدَّ الْعَذَابِ» مفهوم می‌گردد که بین عالم برزخ و عالم دنیا، مشابهت زمانی حاکم است زیرا در این آیه‌ی شریفه به صبح و عصر و زمان فرا رسیدن قیامت اشاره شده است یعنی بعد زمانی هم در دنیا و هم در برزخ وجود دارد.

شماره: ۳۳۱۷۳۹

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. پیامبر (ص) فرمودند: «هرکس سنت و روش نیکی را در جامعه جای سازد تا وقتی که مردمی در دنیا به آن سنت عمل می‌کنند، ثواب آن اعمال را به حساب این شخص هم می‌گذارند، بدون این که از اجر انجام‌دهنده‌ی آن کم کنند.»

شماره: ۸۵۵۸۵۶

۱۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. زیرا در آیه‌ی شریفه‌ی «اللَّهُ لَا إِلَهَ إِلَّا هُوَ لِيَجْمَعَنَّكُمْ إِلَى يَوْمِ الْقِيَامَةِ لَا رَيْبَ فِيهِ مِنْ أَصْدَقِ مَنْ لَدَى اللَّهِ حَدِيثًا» به ترتیب بر توحید ذاتی (الله) و توحید عملی «لا اله الا هو»، حقانیت رستاخیز «لِيَجْمَعَنَّكُمْ إِلَى يَوْمِ الْقِيَامَةِ»، خالی از تردید بودن آن به دلیل صادق القول بودن خداوند «لَا رَيْبَ فِيهِ وَ مِنْ أَصْدَقِ مَنْ لَدَى اللَّهِ حَدِيثًا»، اشاره شده است.

شماره: ۳۰۴۱۵۵

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قرآن کریم در آیه‌ی «وَضَرَبَ لَنَا مَثَلًا وَ نَسِيَ خَلْقَهُ قَالَ مَنْ يَحْيِي الْعِظَامَ وَ هِيَ رَمِيمٌ قُلْ يَحْيِيهَا الَّذِي أَنْشَأَهَا أَوَّلَ مَرَّةٍ وَ هُوَ بِكُلِّ خَلْقٍ عَلِيمٌ» به منکران معاد که در معاد جسمانی شک دارند و می‌گویند چه کسی استخوان‌های پوسیده را زنده می‌کند؟ چنین پاسخ می‌دهد: «بگو همان کسی که نخستین بار آنرا آفرید.» یعنی با اشاره به خلقت نخستین انسان.

شماره: ۸۵۵۸۰۳

۱۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. زیرا حق مسلم انسان‌ها برای دستیابی به استحقاق خود دال بر ضرورت معاد در پرتو عدل الهی است تا حقوق انسان تضييع نشود و با او به عدل رفتار شود.

شماره: ۳۳۳۸۵۰

۱۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. زیرا از دقت در پیام آیه‌ی شریفه‌ی «أَمْ نَجْعَلُ الْمُتَّقِينَ كَالْفُجَارِ» ضرورت معاد در پرتو عدل الهی دریافت می‌شود و از آیه‌ی شریفه‌ی «وَ اللَّهُ الَّذِي أَرْسَلَ الرِّيحَ فَتُثِيرُ سَحَابًا فَسُقْنَاهُ إِلَى بَلَدٍ مِتِّ فَاحْيِينَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَدَّتِهَا كَذَلِكَ النُّشُورُ» امکان معاد جسمانی مبنی بر نظام مرگ و زندگی در طبیعت دریافت می‌شود که عادلانه بودن نظام آفرینش پیام آیه‌ی نخست است.

شماره: ۳۳۱۶۸۷

۱۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. زیرا از دقت در پیام آیه‌ی شریفه‌ی «أَفَحَسِبْتُمْ أَنَّمَا خَلَقْنَاكُمْ عَبَثًا وَ أَنَّكُمْ إِلَيْنَا لَا تُرْجَعُونَ» به ضرورت معاد در پرتو حکمت الهی پی می‌بریم.

شماره: ۳۳۳۸۲۵

۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. زیرا در این گزینه درست بیان نشده است یعنی پس از مرگ گرچه فعالیت‌های حیاتی بدن متوقف می‌شود، اما فرشتگان حقیقت وجود انسان را که همان روح است توفی می‌کنند که کلمه‌ی جسم در این گزینه اضافه آورده شده است. شایان ذکر است که سه گزینه‌ی دیگر مربوط به عالم برزخ درست بیان شده‌اند.

شماره: ۳۰۴۱۳۱

۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a \cdot b = a \cdot c$$

$$a \cdot (b - c) = 0 \Rightarrow a = \vec{0} \text{ یا } b - c = \vec{0} \text{ یا } a \perp b - c$$

البته طبق فرض  $a \neq \vec{0}$  و چون زاویه‌ی بین  $b$  و  $c$ ،  $60^\circ$  است،  $b \neq c$  پس فقط  $a \perp b - c$  می‌تواند صحیح باشد.  
شماره: ۲۹۲۰۱۲

۱۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \alpha = 2\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos \alpha$$

$$|a - b|^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 7 - 2 = 5$$

$$|a - b|^2 = 5 \Rightarrow |a - b| = \sqrt{5}$$

بردار  $a \times b$  بر  $a$  و  $b$  عمود است، پس بر صفحه شامل این دو نیز عمود است یعنی بر  $a - b$  نیز عمود است.

$$|(a - b) \times (a \times b)| = |a - b| |a \times b| \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{15}$$

شماره: ۲۹۲۰۱۳

۱۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -2, 3), (a \times b) \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 4, 4)$$

شماره: ۳۰۴۰۰۴

۱۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$|b'| = \left| \frac{a \cdot b}{|a|} \right| = 2 \Rightarrow |a \cdot b| = 8$$

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 = 4^2 \times 3^2 - 8^2 = 80 \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{80}$$

$$S = |(2a + b) \times (3a - 2b)| = |-7a \times b| = 7|a \times b| = 7\sqrt{80} = 7 \times 4\sqrt{5} = 28\sqrt{5}$$

نکته‌ی ۱: چون  $a \cdot b = |a||b|\cos \theta$  و  $|a'| = |a|\cos \theta$  است، پس در حالت کلی طول تصویر عبارت است از:

$$|b'| = \left| \frac{a \cdot b}{|a|} \right|$$

$$|(ma + nb) \times (pa + qb)| = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} |a \times b|$$

نکته‌ی ۲: در حالت کلی داریم:

$$mq - np$$

شماره: ۳۱۱۰۹۴

۲۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. برای یافتن تصویر  $A$  روی صفحه‌ی  $XOY$  باید  $Z$  را برابر صفر قرار دهیم:

$A'(1, 2, 0)$  برای یافتن قرینه‌ی  $B$  نسبت به محور  $y$ ها باید  $y$  را ثابت نگه داشته و  $x$  و  $z$  را قرینه کنیم:

$$|A'B'| = \sqrt{16 + 0 + 1} = \sqrt{17} \text{ بنابراین: } B'(-3, 2, -1)$$

شماره: ۳۳۲۸۲۱

۲۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر سه نقطه‌ی A و B و C روی یک خط راست باشند، آن‌گاه بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  موازی‌اند:

$$\begin{cases} \vec{AB}(3, 6, -6) \\ \vec{AC}(2, 4, m-5) \end{cases} \quad \vec{AB} \parallel \vec{AC} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{-6}{m-5} \Rightarrow m-5 = -4 \Rightarrow m = 1$$

شماره: ۳۳۲۸۲۲

۲۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|a|} = \frac{-1}{\sqrt{1+2+1}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \gamma = 120^\circ$$

شماره: ۳۳۲۸۲۳

۲۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

تصویر بردار a بر بردار b از رابطه‌ی روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\vec{a}' = \frac{1+12+15}{1+4+9} \vec{b} = \frac{28}{14} \vec{b} = 2\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'| = 2|\vec{b}|$$

$$\left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right|$$

نکته: اندازه‌ی تصویر بردار a روی بردار b برابر است با:

شماره: ۳۳۲۸۲۴

۲۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مساحت مثلث بنا شده بر دو بردار برابر است با نصف اندازه‌ی ضرب خارجی آن‌ها، بنابراین:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(2, 2, 9) \times (-2, 2, 3)| = \frac{1}{2} |(-12, -24, 8)| = \frac{4}{3} |(-3, -6, 2)|$$

$$= 2\sqrt{9+36+4} = 2\sqrt{49} = 14$$

شماره: ۳۳۲۸۲۹

۲۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر سه بردار در یک صفحه قرار داشته باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر آن‌ها برابر صفر است:

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 0$$

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(m, 1, m-1) \cdot [(4, 2, 2) \times (1, 2, 3)]| = |(m, 1, m-1) \cdot (2, -10, 6)|$$

$$= 2m - 10 + 6m - 6 = 0 \Rightarrow 8m = 16 \Rightarrow m = 2$$

شماره: ۳۳۲۸۳۰

۲۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. به ترکیب  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  ضرب سه گانه می‌گویند که بر طبق تمرین کتاب از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c}$$

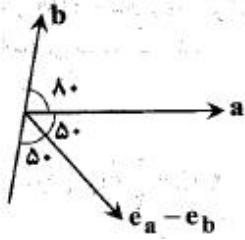
$$(\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = -[(\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}] = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}$$

نکته:

شماره: ۳۳۲۸۳۱

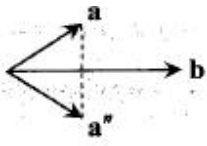
۲۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر  $a$  و  $b$  دو بردار باشند، آن‌گاه  $e_a + e_b$  در راستای نیمساز زاویه‌ی داخلی بین دو بردار  $a$  و  $b$  و  $e_a - e_b$  در راستای نیمساز زاویه‌ی خارجی دو بردار  $a$  و  $b$  است.



با توجه به شکل  $e_a - e_b$  نیمساز است. پس زاویه‌ی بین دو بردار  $b$  و  $e_a - e_b$  برابر  $130^\circ = 50^\circ + 80^\circ$  است. باید توجه کرد که  $e_b - e_a$  نیمساز در جهت مقابل خواهد بود که با زاویه‌ی  $50^\circ$  خواهد ساخت.

نکته:  $a |b| - b |a| = |a| |b| \left( \frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|} \right) = |a| |b| (e_a - e_b)$

شماره: ۳۵۳۳۱۶



۲۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازه‌ی قرینه‌ی بردار  $a$  نسبت به بردار دلخواه  $b$  با اندازه‌ی بردار  $a$  برابر است. بنابراین لزومی به محاسبه‌ی  $a''$  نمی‌باشد. پس:

$$|a| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} \Rightarrow |a''| = |a| = \sqrt{6}$$

نکته: برداری که با جهت مثبت محور  $x$  زاویه‌ی مساوی می‌سازد، به صورت  $(\alpha, \alpha, \alpha)$  است.  $(\alpha > 0)$

شماره: ۳۵۳۳۱۷

۲۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در حالت کلی داریم:  $b \times (a \times c) = (c \cdot b) a - (a \cdot b) c = ma - nc$

این بردار به صورت ترکیبی خطی از بردارهای  $a$  و  $c$  است و لذا همواره در صفحه‌ی  $a$  و  $c$  قرار دارد. تذکر: همواره جمع و تفریق دو بردار در صفحه‌ی آن دو بردار قرار دارد.

نکته:  $a \times (b \times c) = (c \cdot a) b - (b \cdot a) c$

شماره: ۳۵۳۳۱۹

۳۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(2a - b) \times (a + 2b) = \overbrace{2a \times a}^0 + 4a \times b - b \times a - \overbrace{2b \times b}^0 = 2(a \times b) = (7, -7, 14)$$

$$\Rightarrow a - b = (1, -1, 2)$$

$$|a \times b| = |a||b| \cdot \sin \theta \Rightarrow \sqrt{1 + 1 + 4} = 2\sqrt{2} \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta} = 60^\circ \\ \hat{\theta} = 120^\circ \end{cases}$$

شماره: ۸۰۸۵۷۸

۳۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در ماتریس مجاورت قطر اصلی، صفر است و ماتریس متقارن است پس:  $a = 0$  و  $b = 1$

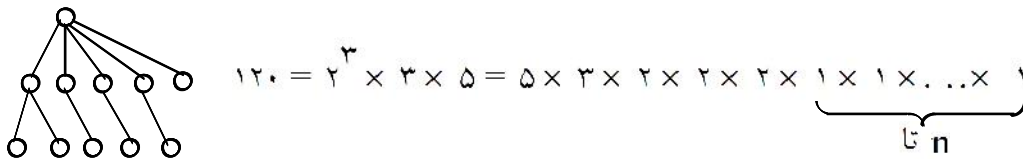
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

حال در ماتریس  $6 \times 6$  تعداد اها برابر است با:  $12 = 2q$  یعنی  $q = 6$

یعنی  $P = 6$  و  $q = 6$  پس درخت کامل نیست، از طرفی تعداد اهای تمام سطرها ۲ تا است یعنی گراف ۲ منتظم است پس گزینه‌ی ۴ می‌تواند باشد.

شماره: ۳۲۷۷۵۳

۳۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. درایه‌های قطر اصلی  $A^2$  همان درجه‌های رئوس گراف هستند. پس حاصل ضرب درجه‌های رئوس درخت ۱۲۰ است:



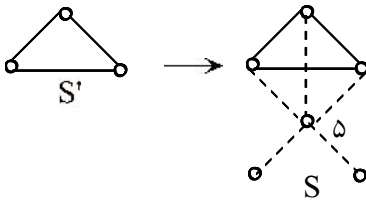
$$\Rightarrow \begin{cases} P = n + 5 \\ q = n + 4 \end{cases}$$

$$\sum \deg(v_i) = 2q \Rightarrow 14 + n = 2n + 8 \Rightarrow n = 6$$

شماره: ۳۹۰۴۷۱

۳۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

درایه‌های قطر اصلی  $A^4$  همان درجه‌های رئوس گراف هستند:



$$135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3 = \text{حاصل ضرب درجه های رئوس}$$

چون گراف راس درجه‌ی ۵ دارد، پس حداقل باید ۶ راس داشته باشد، فرض می‌کنیم دو راس دیگر درجه‌های شان ۱ باشد، در این صورت داریم:

$$S: 5, 3, 3, 3, 1, 1 \rightarrow S': 2, 2, 2, 0, 0, 0$$

بنابراین این گراف (S) دارای ۴ دور به طول ۳ می‌باشد. (۴ مثلث در شکل S).

شماره: ۳۹۰۵۸۱

۳۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت همان درجه‌ی رئوس گراف است، پس

$$p = 7 \xrightarrow{\text{درخت}} q = 6 \Rightarrow 2q = 12$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی  $A^2$  همان  $2q$  می‌باشد:

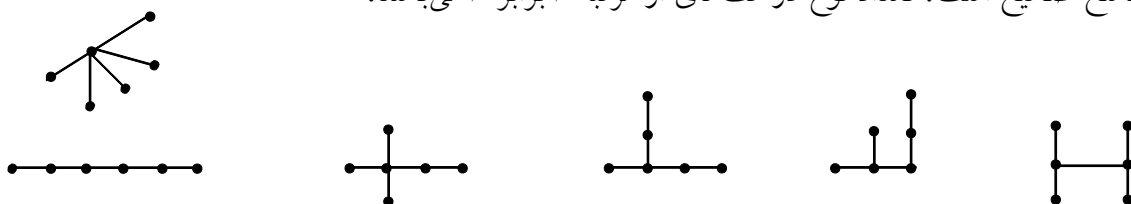
شماره: ۴۳۶۲۸۰

۳۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. گراف موجود در یک درخت است و در هر درخت  $P = q + 1$  است.

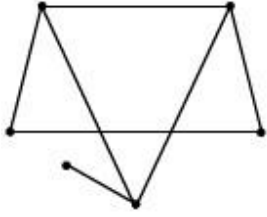
$$7 + 5 + k = \frac{7 \times 1 + 5 \times 2 + k \times 3}{2} + 1 \Rightarrow 2k + 22 = 17 + 3k \Rightarrow k = 5$$

شماره: ۸۴۵۲۲۴

۳۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تعداد نوع درخت‌های از مرتبه ۶ برابر ۶ می‌باشد.



شماره: ۸۶۹۶۷۸



۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. درایه‌های قطری ماتریس  $A^2$  متناظر با درجه هر یک از رأس‌ها است.  
پس کافی است مجموع درجه رأس‌ها تعیین شود.

$$۳ + ۳ + ۳ + ۱ + ۲ + ۲ = ۱۴$$

شماره: ۸۶۹۷۰۵

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ماتریس مجاورت گراف مزبور  $۵ \times ۵ = ۲۵$  عضو دارد که تعداد درایه‌های ۱ در آن برابر مجموعه درجه رأس‌های آن است یعنی:  $۱۰ = ۵ \times ۲$ ، پس:  $۱۵ = ۲۵ - ۱۰$  عضو صفر دارد.

شماره: ۸۷۱۲۶۴

۳۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. گراف همبند  $G$  که فاقد دور باشد، درخت است. در هر درخت  $q = p - ۱$  است. اکنون می‌توانیم بنویسیم ( $G$  روی هم دارای  $۳ + m + ۶$  رأس است):

$$\sum \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۶(۱) + ۳(۲) + m(۳) = ۲(p - ۱) \Rightarrow ۱۲ + ۳m = ۲(۹ + m - ۱)$$

$$\Rightarrow ۱۲ + ۳m = ۱۶ + ۲m \Rightarrow m = ۴$$

پس  $G$  دارای  $۱۳ = ۳ + ۶ + ۴$  رأس و  $۱۲ = ۱۳ - ۱ = ۱۲$  یال است، در نتیجه  $p + q = ۲۵$

شماره: ۸۳۲۴۴۶

۴۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازه‌ی یک درخت از مرتبه‌ی  $p$  برابر است با  $q = p - ۱$ . هم‌چنین تعداد صفرهای ماتریس مجاورت یک گراف از مرتبه‌ی  $p$  و اندازه‌ی  $q$  برابر است با  $p^۲ - ۲q$ ، داریم:

$$p = ۵ \xrightarrow{\text{درخت}} q = ۴$$

$$\text{تعداد صفرها} = ۵^۲ - ۲ \times ۴ = ۲۵ - ۸ = ۱۷$$

شماره: ۲۷۳۳۳۷

۴۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. وقتی می‌گوییم بین دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد، یعنی گراف مورء نظر درخت است.

درجه	تعداد رأس
۱	$k$
۲	۴
۳	۳

$$P = k + ۴ + ۳ = k + ۷ \xrightarrow{\text{درخت}} q = p - ۱ = k + ۶$$

$$\sum \deg(V_i) = ۲q \Rightarrow k \times ۱ + ۴ \times ۲ + ۳ \times ۳ = ۲(k + ۶)$$

از طرفی:

$$: k + ۱۷ = ۲k + ۱۲ \Rightarrow k = ۵$$

شماره: ۲۷۷۲۸۳

۴۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow G :$$



شماره: ۸۲۳۳۰۵

۴۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. تعداد یک‌ها در ماتریس مجاورت هر گراف ساده برابر  $2q$  و تعداد صفرها برابر

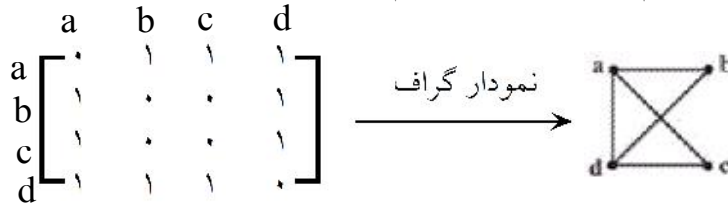
$$\left. \begin{array}{l} 2q = 36 \\ p^2 - 2q = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow p^2 = 45 + 36 = 81 \Rightarrow p = 9$$

$p^2 - 2q$  است، بنابراین:

از طرفی در گراف‌های منتظم  $2q = Pf$  می‌باشد، بنابراین:

شماره: ۲۵۵۲۴۱

۴۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. بهتر است نمودار گراف را با نام‌گذاری رأس‌ها، بکشیم.



همان‌گونه که می‌بینیم، این گراف همبند است و دارای دو دور به طول ۳ است (acda, abda) یعنی دور به طول فرد دارد. از آنجا که این گراف از مرتبه‌ی  $P = 4$  است و دارای دوری به طول ۴ می‌باشد (acdba)، پس همبند است. این گراف روی هم دارای ۳ دور است.

شماره: ۸۲۳۰۴۰

۴۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. درایه‌های قطر اصلی  $A^2$  همان درجات رأس‌های گراف  $G$  می‌باشند، پس مجموع

درایه‌های روی قطر اصلی  $A^2$  برابر  $2q$  می‌باشد، از طرفی تعداد یک‌های ماتریس  $A$  نیز برابر است با  $2q$ ، پس داریم:

از طرفی تعداد درایه‌های قطر اصلی  $A^2$  برابر ۶ است پس  $P = 6$  در نتیجه داریم:

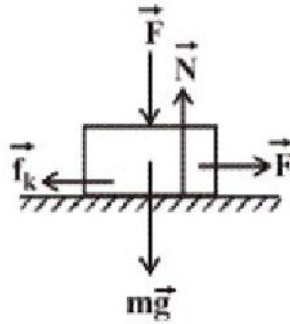
$$A = p^2 - 2q = 6^2 - 18 = 18$$

$$A = 18 - 6 = 12$$

شماره: ۳۵۱۰۴۶



۴۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



در راستای افقی می‌توان نوشت:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F - f_k = ma_x \quad \begin{matrix} f_k = \mu_k N \\ N = F + mg \end{matrix} \Rightarrow F = \mu_k (F + mg) = ma_x$$

$$\Rightarrow F = \frac{(a_x + \mu_k g)m}{1 - \mu_k} \Rightarrow F = \frac{(2 + 0/2 \times 10) \times 4}{1 - 0/2} \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

شماره: ۸۰۵۸۸۷

۴۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قانون دوم نیوتون، می‌توان نوشت:

$$F = m_1 a_1 \Rightarrow m_1 = \frac{F}{a_1} \quad (1)$$

$$F = m_2 a_2 \Rightarrow m_2 = \frac{F}{a_2} \quad (2)$$

$$F = (m_1 + m_2) a \Rightarrow m_1 + m_2 = \frac{F}{a} \xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \frac{F}{a_1} + \frac{F}{a_2} = \frac{F}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{4} \frac{m}{s}$$

شماره: ۸۰۶۱۸۷

۴۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی قانون دوم نیوتون، ابتدا برابری نیروهای وارد بر جسم را تعیین می‌کنیم و سپس شتاب جسم را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F} = (2\vec{i} + 10\vec{j}) + (4\vec{i} - 2\vec{j}) = 6\vec{i} + 8\vec{j} \text{ (N)}$$

$$F = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ N} \quad , \quad a = \frac{F}{m} = \frac{10}{5} = 2 \frac{m}{s}$$

شماره: ۸۰۸۲۳۶

۴۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی شتاب گرانش در سطح یک سیاره، می‌توان نوشت:

$$g = G \frac{M}{R^2} \Rightarrow \frac{g_p}{g_e} = \frac{M_p}{M_e} \times \left( \frac{R_e}{R_p} \right)^2 \Rightarrow \frac{g_p}{g_e} = \frac{10 M_c}{M_e} \times \left( \frac{R_e}{\frac{1}{2} R_c} \right)^2 = \frac{1}{10} \times 4 \Rightarrow \frac{g_p}{g_e} = 0/4$$

شماره: ۸۰۸۹۵۹

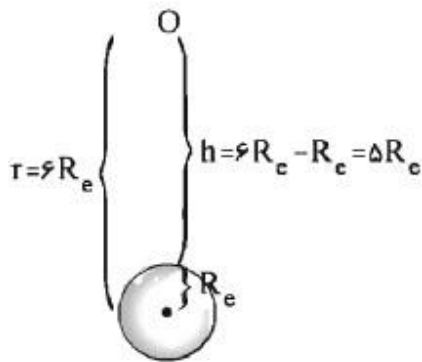
۵۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا اندازه‌ی نیروی  $\vec{F}$  را که باعث حرکت جسم با شتاب ثابت شده است، محاسبه می‌کنیم:

$$F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k mg = ma \Rightarrow F - \frac{2}{10} \times 1 \times 10 = 1 \times 3 \Rightarrow F = 5N$$

نیروی  $F$  باعث کشیدگی فنر شده است، بنابراین داریم:

$$F = k\Delta x \xrightarrow[k = 500 \frac{N}{m}]{F = 5N} 5 = 500 \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{100} m = 1 \text{ cm}$$

شماره: ۸۰۸۹۶۳



۵۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی نیروی گرانش خواهیم داشت:

$$F_1 = \frac{GM_e m}{r^2} \Rightarrow F_1 = \frac{1}{36} F_2$$

$$\Rightarrow r^2 = 36 R_e^2 \Rightarrow r = 6 R_e$$

$$F_2 = \frac{GM_e m}{R_e^2}$$

توجه کنید  $r$  فاصله از مرکز زمین است و در سؤال ارتفاع از سطح زمین خواسته شده است.

شماره: ۸۶۶۷۳۳

۵۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f_k = F \cos \alpha = 300 \times \frac{\sqrt{3}}{2} N = 150 \sqrt{3} N$$

$$N = mg - F \sin \alpha = \left( 600 - 300 \times \frac{1}{2} \right) N = 450 N$$

$$f_k = \mu_k N \Rightarrow 150 \sqrt{3} = \mu_k \times 450 \Rightarrow \mu_k = \frac{150 \sqrt{3}}{450} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

شماره: ۸۷۵۰۴۴

۵۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا برآیند نیروها را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 15\vec{i} + 20\vec{j}$$

$$|\vec{F}_T| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 N$$

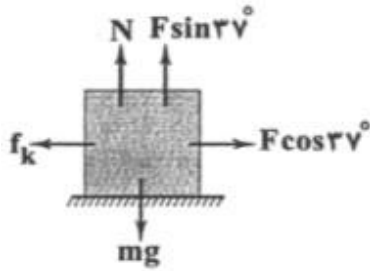
$$F = ma \Rightarrow 25 = 5a \Rightarrow a = 5 \frac{m}{s}$$

برای محاسبه‌ی شتاب جسم خواهیم داشت:

برای محاسبه‌ی بزرگی سرعت با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان خواهیم داشت:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow V^2 - 0 = 2 \times 5 \times 22/5 \Rightarrow V = 15 \frac{m}{s}$$

شماره: ۸۷۵۲۵۱



۵۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نیروی فنر وارد بر جسم را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg - F \sin 37^\circ \\ \sum F_x = 0 \Rightarrow F \cos 37^\circ = f_k = \mu_k N \\ \Rightarrow F \cos 37^\circ = \mu_k (mg - F \sin 37^\circ) \end{cases}$$

$$F = k\Delta L \rightarrow k\Delta L \cos 37^\circ = \mu_k (mg - k\Delta L \sin 37^\circ)$$

$$50 \Delta L \times 0.8 = \frac{1}{3} (30 - 50 \Delta L \times 0.6) \Rightarrow \Delta L = \frac{1}{5} \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

شماره: ۸۷۵۲۷۴

۵۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$F - F_k = ma \Rightarrow \begin{cases} 10 - F_k = 4m \\ 12 - F_k = 5m \end{cases} \Rightarrow m = 2 \text{ kg}$$

شماره: ۳۳۶۶۰۱

۵۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون جسم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و یک نیرو با امتداد ثابت وارد

می‌شود، بنابراین نیروی اصطکاک در خلاف جهت  $\vec{F}$  خواهد بود. بنابراین:

$$\vec{f}_k = x \vec{F}, (-1 < x < 0) \Rightarrow \sum \vec{F} = (x + 1) \vec{F} = ma \Rightarrow$$

$$(x + 1) |\vec{F}| = m |\vec{a}| \Rightarrow (x + 1) \times 30 = 2 \times 10 \Rightarrow x$$

$$= -\frac{1}{3} \Rightarrow \vec{f}_k = -6\vec{i} - 8\vec{j}$$

شماره: ۳۴۱۸۵۰

$$\sum_i F = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow 30 - f_k = 10 \times 1 \Rightarrow f_k = 20 \text{ N}$$

۵۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sum F = ma \Rightarrow 60 - 20 = 10 a \Rightarrow a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

در حالت دوم:  $F = 60 \text{ N}$

$$\sum_i F = ma \Rightarrow \sum_i F_2 - \sum_i F_1 = m (a_2 - a_1)$$

بیان کوتاه‌تر:

$f_k$  ثابت است و  $F$  به اندازه‌ی ۳۰ نیوتن زیاد شده است.

$$30 = m (a - 1) \Rightarrow a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

شماره: ۳۵۳۰۳۸

۵۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$g_c = g_m \Rightarrow \frac{GM_e}{r_e^2} = G \frac{M_m}{r_e^2} \Rightarrow \frac{M_e}{r_e} = \frac{M_m}{r_e}$$

اگر به جای  $M_c$ ، معادله‌ی آن  $80M_m$  قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{80M_m}{r_e^2} = \frac{M_m}{r_m^2} \Rightarrow \frac{80}{r_e^2} = \frac{1}{r_m^2} \Rightarrow \frac{r_e}{r_m} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

شماره: ۸۱۹۳۱۲

۵۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر بزرگی نیروی کشش نخ را  $T$  فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a) = 0.05(10 + 2)N = 0.6N$$

شماره: ۸۱۹۱۰۶

۶۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید از حداکثر نیروی قابل تحمل طناب استفاده کنیم و شتاب حرکت را در این حالت حساب کنیم.

$$F_{\max} - mg = ma \Rightarrow 52 - 50 = 5a \Rightarrow a = \frac{2}{5} \frac{m}{s}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 5 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}t^2 \Rightarrow t = 5s$$

شماره: ۸۵۷۶۲۶