

۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گروه‌های اسمی عبارتند از:

مولانا	۱ تکواژ
تواضع و خاک نهادی را	تواضع / و / خاک / نهاد / ی / را ۶ تکواژ
خلق رسول خدا	خلق / _ / رسول / _ / خدا ۵ تکواژ
سبق سلام را	سبق / _ / سلام / را ۴ تکواژ
کرنش و تواضع	کرنش / و / تواضع ۳ تکواژ

در عبارت سوال «را» حرف نشانه‌ی مفعولی است و در گروه اسمی قابل شمارش است.

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گروه‌های قیدی عبارتند از:

(۱) به هر حال	(۲) با ذهن خلاق و آفریننده (۳) آن‌چنان	(۴) در انتقال احساس	(۵) به دشواری
گروه‌های فعلی عبارتند از:			
(۱) است	(۲) درآمیزد	(۳) نیفتد	

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه‌ی ۱: کسی از دور فلک هیچ مهربانی ندید.
گزینه‌ی ۲: دادگر آسمان از او داد بگیرد، اگر دادگر خاک داد خلق ندهد.
گزینه‌ی ۴: پس پند آن‌که در تاج سرش پیدا بود.

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

<u>ترکیب وصفی</u>	<u>ترکیب اضافی</u>
شکوه شورانگیز	شکوه طلوع / تقوای طلوع / شگفتی طلوع / زیبایی طلوع
تقوای شورانگیز	طلوع خورشید
شگفتی شورانگیز	نزدیکش
زیبایی شورانگیز	لطافت گل
لطافت زیبا	انگشت‌های تشریح

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. املاي درست واژگان نادرست به ترتیبی که در متن آمده است:
اوامر و نواهی / حقوق ایشان می‌گزارد / غدر / خویشی و نسب / نقض عهد / جان‌ثمین

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در این گزینه دو فعل به قرینه‌ی معنوی حذف شده است:

ای کسی که عنصر تو از کیمیای عزت، مخلوق (است)
و ای کسی که دولت تو از وصمت (عیب) تباهی، ایمن (است)

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مشتق: زندگی (دوبار) - سپاهی - شناسایی

مرکب: شهزاد

مشتق - مرکب: دانشجو - جاه‌طلبی - تندخویی

۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. «لا یعانی: رنج نمی‌برد» (رد گزینه‌های ۱ و ۳) / «الکسالة التي: تنبلی که» (رد گزینه‌های ۱ و ۲)

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ترجمه‌ی صحیح: بار پادماده مخالف بار الکترون می‌باشد.

نکته‌ی مهم درسی: پادماده باری مخالف بار الکترون دارد ← لقرین المادّة شحنةٌ مخالفةٌ شحنة الکترون ^{به عربی}

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

«اللیل» در گزینه‌ی ۱، مفعول به می‌باشد. «امشب را گذراندم» ← «قضیّت» متعدّی است و به مفعول به نیاز دارد. مفعول به

مفعول فیه در سایر عبارات به ترتیب: «تلک، لها، مع» می‌باشد.

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون جمله به تمییز نیاز دارد، پس گزینه‌ی ۴ درست است؛ زیرا جامد می‌باشد و سایر گزینه‌ها مشتق هستند.

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

یساعد ← «س ع د» فعل صحیح می‌باشد.

فعل معتل در سایر گزینه‌ها به ترتیب: یشفی، هیأنا، کان

۱۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مفاعیل در سایر گزینه‌ها به ترتیب عبارت است از:

گزینه‌ی ۱: «أیضاً» (مفعول مطلق)

گزینه‌ی ۲: «حول» (مفعول فیه)

گزینه‌ی ۴: «لها» قبل از فعل ماضی (مفعول فیه)

۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. «لا تقف» (قف و) فعل ناقص / «لیس» (لی س) فعل اجوف

«لا تقف» ← لا تقف جزم فعل ناقص به حذف حرف عله می‌باشد.

۱۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. معنای غیبت امام آن نیست که ایشان در جامعه حضور ندارد، بلکه بدین معناست که ایشان از نظرها غایب‌اند.

۱۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۱۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. حدود سه سال از بعثت گذشته بود که این فرمان از جانب خداوند برای پیامبر آمد: «خویشان نزدیک خود را انداز کن» برای انجام این دستور، رسول خدا (ص) چهل نفر از بزرگان بنی‌هاشم را دعوت کرد و درباره‌ی اسلام با آنان سخن گفت. پس از این که تنها حضرت علی (ع) اعلام آمادگی و وفاداری کرد، پیامبر (ص) دست ایشان را در دست گرفت، بیعت ایشان را پذیرفت و به مهمانان فرمود: «همانا این، برادر من، وصی من و جانشین من در میان شما خواهد بود.»

۱۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. همه‌ی گزینه‌ها مفهوم به دست آمده از این حدیث می‌باشد به جز گزینه‌ی ۲ که پیرامون دستور به پیروی از امیرالمؤمنین (ع) است که با سخن: «سوگند به خدایی که جانم در دست قدرت اوست، این مرد و کسانی که از او پیروی کنند، رستگارند.» ارتباط دارد.

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در زمان امام صادق (ع) ناخشنودی نسبت به دستگاه بنی‌امیه به اوج رسیده بود. در این شرایط دو جناح علیه امویان فعالیت می‌کردند، یکی عباسیان و دیگری علویان. به همین جهت امام صادق (ع) مبارزه‌ی خود را علنی‌تر کرد و در فرصت‌های مناسب از جمله در روز عرفه در مراسم حج، حق حکومت را از آن خود اعلام نمود.

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در قسمت ویژگی‌های لازم برای رسیدن به پاسخی راه‌گشا و اطمینان‌بخش به دو ویژگی اشاره می‌گردد. در ویژگی دوم که «صحت» است مطرح می‌گردد: «عمر محدود آدمی برای رسیدن به چنین تجربه‌ای کافی نیست به خصوص که راه‌های پیشنهادی هم بسیار زیاد و گوناگون است.» و آیه‌ی (إِنَّ هَذَا الْقُرْآنَ ...) مستقیماً اشاره به قرآن یا همان برنامه‌ی زندگی می‌نماید.

۲۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. یکی از نکاتی که از حدیث «انا مدینة العلم و علی بابها» به دست می‌آید، آن است که حضرت علی (ع) در علم خود معصوم است، وگرنه رسول خدا (ص) نمی‌فرمود که همه باید به ایشان مراجعه کنند. وجوب مراجعه به ایشان و مطابق نظر علی (ع) عمل کردن، بیان‌گر ملاک و معیار بودن نظر ایشان است.

۲۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. بعد از فعل **expect** از مصدر کامل استفاده می‌کنیم. «انتظار می‌رود دانش انگلیسی شما در دو سال آینده بهبود یابد.»

۲۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. «در بیش‌تر جوامع انسانی، مردم به صورت تشکلهای خانوادگی با هم زندگی می‌کنند.»
(۱) جوامع (۲) تدارکات — (۳) حمایت‌ها (۴) عبارات

۲۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. «خاطره‌ی مسافرت‌م به اصفهان در ذهنم مانده است، هرگز آن را فراموش نخواهم کرد.»
(۱) چسبیدن، ماندن (۲) خوابیدن (۳) ایستادن — (۴) پایان دادن

۲۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. «مایلم هزینه‌ی احتمالی تعمیرات را بدانم.»
(۱) اجتماعی (۲) ناگهانی — (۳) یکنواخت (۴) احتمالی

۲۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مقامات شهر برای متوقف کردن تورم و بیکاری دست به اقدامات جدی زده‌اند.
(۱) امکانات (۲) اقدامات (۳) توانایی‌ها (۴) عملکردها

۲۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. «من نمی‌دانم این فیلم چه تاثیری ممکن است بر رفتار کودکان کوچک داشته باشد.»
(۱) دوره‌ی زمانی (۲) انتخاب (۳) حوادث (۴) اثر، تاثیر

۲۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. توضیح: بعد از فعل **keep** از شکل **ing** دار فعل استفاده می‌شود.
ترجمه: تا رسیدن به یک نتیجه‌ی بهتر به آزمایشات جدید ادامه دهید.

۳۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. «به علت کمبود وقت، پروفیسور آبراهام به‌طور خلاصه آنچه که در جلسه‌ی قبل انجام شده بود را توضیح داد.»

(۱) به‌طور مشابه (۲) به‌طور مختصر (۳) صرفاً (۴) به‌طور تعجب‌آوری

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $(a, f(a))$ ، عبارت است از:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

نقطه‌ی مورد نظر را $A \Big|_{f(\alpha)}$ فرض می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

معادله‌ی خط مماس به صورت زیر است:

$$y - \frac{1}{\alpha+2} = \frac{-1}{(\alpha+2)^2}(x - \alpha)$$

چون مبدأ مختصات روی این خط قرار دارد، پس در معادله‌ی آن صدق می‌کند:

$$0 - \frac{1}{\alpha+2} = \frac{-1}{(\alpha+2)^2}(0 - \alpha) \Rightarrow \frac{-\alpha}{\alpha+2} = 1 \Rightarrow -\alpha = \alpha + 2 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow \text{نقطه مورد نظر} : A \Big|_{-1}$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته (قاعده‌ی هوییتال): اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $f(x)$ و $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مشتق پذیر باشند، داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

نکته (مشتق تابع مرکب):

نکته: اگر $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته است.

نکته: اگر $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه $f^{k(x)}$ هم در این نقطه پیوسته است.

حد مخرج کسر صفر است، ولی حاصل حد عدد حقیقی است، بنابراین باید حد صورت هم صفر باشد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f^3(2-h) - 8 = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f^3(2-h) = 8 \xrightarrow[\text{پیوسته}]{x=2 \text{ در } f^3} f^3(2) = 8 \Rightarrow f(2) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(2-h) - 8}{h} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3f^2(2-h)f'(2-h)}{1} = -3f^2(2)f'(2)$$

$h \rightarrow 0$

$h \rightarrow 0$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} 12 \xrightarrow{f(2)=2} f'(2) = -1$$

$$y = xf\left(\frac{6}{x}\right) \Rightarrow y' = f\left(\frac{6}{x}\right) + x\left(\frac{-6}{x^2}\right)f'\left(\frac{6}{x}\right) \xrightarrow{x=3} y'(3) = f(2) - 2f'(2)$$

$$= 2 - 2(-1) = 4$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
 نکته: تابع f در بازه‌ای که $f'(x) > 0$ و $f''(x) < 0$ صعودی (نزولی) است.
 نکته: تقعر تابع f در بازه‌ای که $f''(x) > 0$ و $f''(x) < 0$ رو به بالا (پایین) است.

نکته: $(\text{Ln}|u|)' = \frac{u'}{u}$

$$y = -x \text{Ln}|x| = \begin{cases} -x \text{Ln}x & , x > 0 \\ -x \text{Ln}(-x) & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -\text{Ln}x - 1 & , x > 0 \\ -\text{Ln}(-x) - 1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{y' > 0} \begin{cases} \text{Ln}x < -1 & , x > 0 \\ \text{Ln}(-1) < -1 & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < e^{-1} \\ -e^{-1} < x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$y'' = \begin{cases} -\frac{1}{x} & , x > 0 \\ -\frac{1}{x} & , x < 0 \end{cases} \xrightarrow{y'' < 0} \begin{cases} x > 0 & , x > 0 \\ x > 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

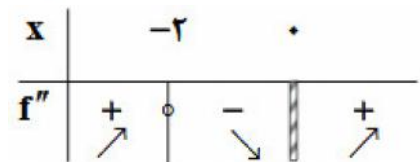
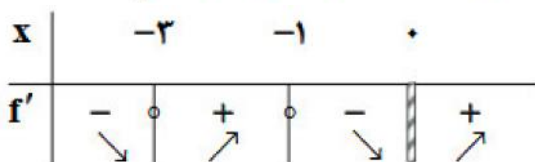
از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $0 < x < \frac{1}{e}$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x(x+3)^2 & x \geq 0 \\ -x(x+3)^2 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} (x+3)^2 + 2x(x+3) & x > 0 \\ -(x+3)^2 - 2x(x+3) & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} (x+3)(3x+3) & x > 0 \\ (x+3)(-3x-3) & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 3x+3+3x+9 & x > 0 \\ -3x-3-3x-9 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x+12 & x > 0 \\ -6x-12 & x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-3, -1) \cup (0, +\infty) \\ f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 0) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in (-2, -1) \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow b - a = -1 + 2 = 1$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left(\text{Sin}^2(\text{tg}^{-1} x) \right)' = 2 \text{Sin}(\text{tg}^{-1} x) \text{Cos}(\text{tg}^{-1} x) \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \xrightarrow{x=-1}$$

$$\left(\text{Sin}^2(\text{tg}^{-1} x) \right)'_{x=-1} = 2 \text{Sin}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{Cos}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
 نکته: نقطه‌ی درونی $c \in D_f$ را یک نقطه‌ی بحرانی نامیم، هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.
 در $x = 3$ مشتق وجود ندارد، پس این نقطه یک نقطه‌ی بحرانی است.

$$y' = 0 \Rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

بنابراین مجموع طول نقاط بحرانی برابر است با:

$$0 + 2 + 3 = 5$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^3 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \\ f'(1) = 5 \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(2x) - 1}{f^2(x) - 4} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(f^{-1})'(2x)}{2f(x)f'(x)} = \frac{(f^{-1})'(2)}{f(1)f'(1)} = \frac{\frac{1}{5}}{2 \times 5} = \frac{1}{50}$$

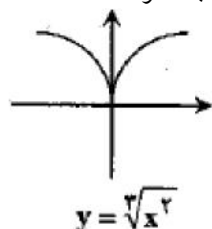
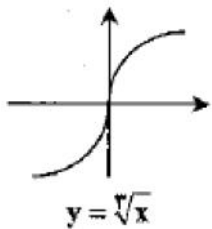
۳۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. خط $x = 2$ بر تابع مماس است، پس $f'(2) = \pm \infty$ و بنابراین $x = 2$ ریشه‌ی عبارت زیر رادیکال است.

$$2^3 + 2a + 22 = 0 \Rightarrow a = -15$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 15x + 22} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - \frac{15}{\sqrt[3]{(x^3 - 15x + 22)^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-12}{\sqrt[3]{8^2}} = -1$$

نکته: نقطه‌ی $x = a$ برای تابع $f(x) = \sqrt[2n+1]{(x-a)^{2m}g(x)}$ با شرط $g(a) \neq 0$ و $2n+1 > 2m$ ، طول

نقطه‌ی بازگشت و برای تابع $f(x) = \sqrt[2n+1]{(x-a)^{2m+1}g(x)}$ با شرط $g(a) \neq 0$ و $2n+1 > 2m+1$ ،



طول نقطه‌ی عطف قائم است. مثلاً:

در هر دو حالت، خط $x = a$ بر تابع $f(x)$ مماس است.

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
 نکته: آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نکته: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه‌ی $x = a$ برابر است با: $f'(a)$

$$\begin{cases} \bar{f} = \frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \frac{a^3 + 2a - 3}{a - 1} \\ f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(\sqrt{3}) = 11 \end{cases}$$

طبق فرض داریم:

$$\frac{a^3 + 2a - 3}{a - 1} = 11 \Rightarrow a^3 + 2a - 3 = 11a - 11 \Rightarrow a^3 - 9a + 8 = 0 \Rightarrow a^3 - a - 8a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow a(a^2 - 1) - 8(a - 1) = 0 \Rightarrow (a - 1)[a(a + 1) - 8] = 0$$

$$a > 1 \rightarrow a^2 + a - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \checkmark \\ a = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} < 1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

دقت کنید با تقسیم $a^3 - 9a + 8$ بر $a - 1$ هم می‌توان به $a^2 + a - 8$ رسید.

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: در بازه‌ای که $f'(x) < 0$ ، تابع f نزولی (صعودی) است.
 نکته: در بازه‌ای که $f''(x) < 0$ ، تابع f مقعر (بالا) است.

نکته: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \xrightarrow{\text{صعودی } f} f'(x) > 0 \xrightarrow{x^2 > 0} 1 - \ln x > 0$$

$$\Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow 0 < x < e \quad (*)$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} \xrightarrow{\text{مقعر } f} f''(x) < 0$$

$$\xrightarrow{x^3 > 0} -3 + 2 \ln x < 0 \Rightarrow 2 \ln x < 3 \Rightarrow \ln x < \frac{3}{2} \Rightarrow 0 < x < e^{\frac{3}{2}} \quad (**)$$

اشتراک (*) و (**): داریم: $x \in (0, e)$

۴۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

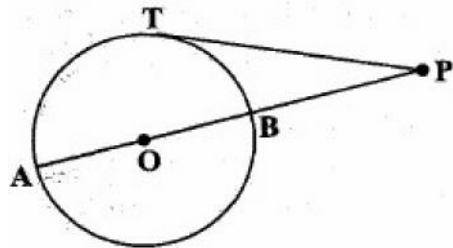
$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{OO'^2 - (7 - 1)^2} = \sqrt{OO'^2 - 36} = 8$$

$$\Rightarrow OO'^2 = 100 \Rightarrow OO' = 10$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$$

۴۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

راه حل اول:



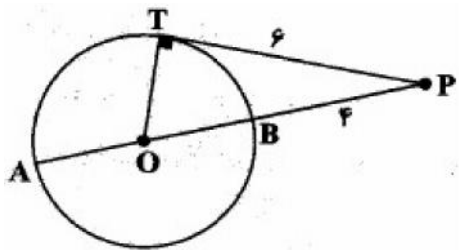
$$PT^2 = PB \cdot PA$$

می‌دانیم: طبق فرض، $PT = 6$ ، $PB = 4$ ، بنابراین:

$$36 = 4 \times PA \Rightarrow PA = 9$$

راه حل دوم:

با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTP، داریم:

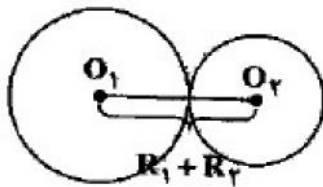


$$TP^2 + OT^2 = OP^2 \quad \begin{array}{l} TP = 6, OT = r \\ OP = PB + BO = 4 + r \end{array}$$

$$6^2 + r^2 + (4 + r)^2 \Rightarrow 36 = 8r + 16 \Rightarrow r = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow PA = PB + 2r = 4 + 5 = 9$$

۴۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

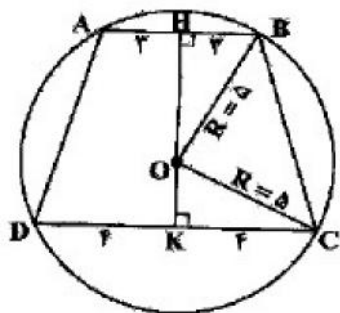


$$R_1 = 4R_2, TT' = 32$$

$$TT' = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2} \Rightarrow 32$$

$$= \sqrt{(5R_2)^2 - (3R_2)^2} = 4R_2 \Rightarrow R_2 = 8 \Rightarrow R_1 = 4 \times 8 = 32$$

۴۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. دو شکل برای این سؤال قابل رسم است:

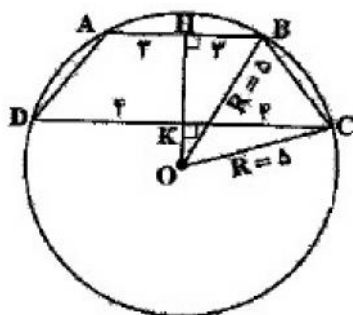


$$\begin{cases} OH = \sqrt{25 - 9} = 4 \\ OK = \sqrt{25 - 16} = 3 \end{cases} \Rightarrow HK = 7$$

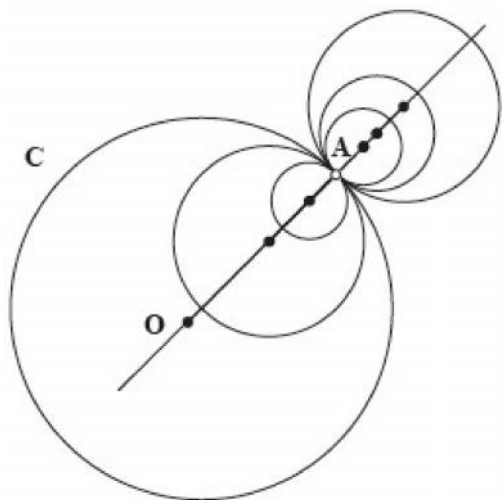
$$S_{ABCD} = \frac{(6 + 8)}{2} \times 7 = 49$$

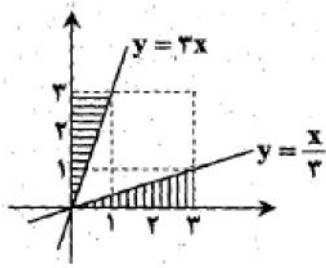
$$\begin{cases} OH = \sqrt{25 - 9} = 4 \\ OK = \sqrt{25 - 16} = 3 \end{cases} \Rightarrow HK = 1$$

$$S_{ABCD} = \frac{(6 + 8)}{2} \times 1 = 7$$



۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل مرکز دایره‌های بر دایره‌ی C و گذرنده از نقطه‌ی A و نقطه‌ی O روی یک خط راست قرار دارند، بنابراین مکان هندسی این نقاط، خطی است که از O و A می‌گذرد، اما چون نقطه‌ی A جزو این مکان نیست، بنابراین دقیق‌ترین جواب دو نیم‌خط است.





۴۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اولاً چون هر عدد حقیقی می‌تواند انتخاب شود، فضای نمونه پیوسته است. چون نمی‌دانیم X کوچک‌تر است یا Y ، پس هر دو حالت زیر را باید در نظر بگیریم:

$$\frac{x}{y} < \frac{1}{3} \rightarrow y > 3x$$

$$\frac{y}{x} < \frac{1}{3} \rightarrow y < \frac{x}{3}$$

که این دو ناحیه داخل فضای نمونه‌ای $S = [0, 3] \times [0, 3]$ که مربعی به ضلع ۳ است قرار گرفته‌اند. پس:

$$P = \frac{\frac{3 \times 1}{2} \times 2}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$$

۴۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{کل اعداد ۴ رقمی} &= 5 \times 5 \times 4 \times 3 \\ \text{اعداد ۴ رقمی زوج} &= 5 \times 4 \times 3 \times 1 \\ &\quad \cdot \\ &\quad 4 \times 4 \times 3 \times 2 \\ &\quad \quad \quad \cdot \\ &\quad \quad \quad 2 \\ &\quad \quad \quad \cdot \\ &\quad \quad \quad 4 \end{aligned}$$

$$P(\text{زوج بودن}) = \frac{4 \times 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3 \times 1}{5 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{4 \times 2 + 5}{5 \times 5} = \frac{13}{25}$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: $(A \Delta B)' = A' \Delta B = A \Delta B'$

نکته: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$P(A \cup B) + P(A' \cup B') = P(A \cup B) + P((A \cap B)') = P(A \cup B) + 1 - P(A \cap B) = 1/7$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = 1/7 \Rightarrow P(A \Delta B) = 1/7 \Rightarrow P(A \Delta B') = P((A \Delta B)')$$

$$= 1 - 1/7 = 6/7$$

۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. احتمال آمدن هر عدد زوج را با X و احتمال آمدن هر عدد فرد را با $2X$ نشان می‌دهیم. در این صورت چون مجموع کل احتمال‌ها برابر ۱ است، داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{احتمال آمدن ۴} & & \text{احتمال آمدن ۶} & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{احتمال آمدن ۲} & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ 2X + X + 2X + X + 2X + X = 1 & \Rightarrow & 9X = 1 & \Rightarrow & X = \frac{1}{9} & & \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \text{احتمال آمدن ۱} & & & & \text{احتمال آمدن ۵} & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{احتمال آمدن ۳} & & & & \end{array}$$

$$P(\text{مجموع دو عدد ۳}) = P(\text{بار اول ۱ و بار دوم ۲}) + P(\text{بار اول ۲ و بار دوم ۱})$$

$$= P(1)P(2) + P(2)P(1) = \left(\frac{2}{9} \times \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{81}$$

۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فضای نمونه‌ای، ناحیه درون مربع زیر است. برای این که فاصله نقطه مورد نظر از (۰, ۴) بیشتر از ۲ باشد، باید خارج دایره‌ای به مرکز (۰, ۴) و شعاع ۲ باشد، بنابراین پیشامد مورد نظر قسمت هاشورزده است.

$$a(S) = \frac{1}{4} \times 8 \times 8 = 32$$

مساحت A' ربع مساحت دایره است، زیرا زاویه مرکزی نظیر آن 90° است.

$$a(A') = \frac{1}{4} \times \pi (2)^2 = \pi$$

$$a(A) = a(S) - a(A') = 32 - \pi$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{a(A)}{a(s)} = \frac{32 - \pi}{32} = 1 - \frac{\pi}{32}$$

۵۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Delta U = q \cdot \Delta V \Rightarrow +0.5 \times 10^{-3} = -10 \times 10^{-6} (V_B - V_A) \Rightarrow V_B - V_A = -50 \text{ V}$$

$$Q = mc\Delta\theta = 10 \times 4000 \times (-20) = -8 \times 10^5 \text{ J}$$

۵۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

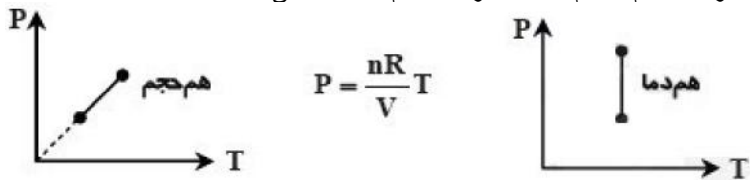
$$Q_C = 8 \times 10^5 \text{ J}, \quad Q_H = -10^6 \text{ J}$$

از آب $(8 \times 10^5 \text{ J})$ گرما گرفته شده است.

$$|Q_H| = Q_C + W \Rightarrow W = 10^6 - 8 \times 10^5 = 2 \times 10^5 \text{ J}$$

$$K = \frac{Q_C}{W} = \frac{8 \times 10^5}{2 \times 10^5} = 4$$

۵۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چرخه‌ی موردنظر از دو فرآیند هم‌حجم و دو فرآیند هم‌دما تشکیل شده است.



پس شکل چرخه به شکل گزینه‌ی ۳ یا ۴ است. در مورد جهت گردش چرخه توجه کنید که فرآیند هم‌دمای با دمای بیشتر، یک فرآیند کاهش حجم است.

۵۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|Q_C| = |mc\Delta\theta| + |mL_F| = 3000 \times 30 \times 4 + 3000 \times 330 = 3000 \times 460 \text{ J}$$

$$|W| = \frac{|Q_C|}{K} = \frac{3 \times 46 \times 10^4}{6} \text{ J} = 23 \times 10^4 \text{ J}$$

$$|W| = P \cdot t \Rightarrow t = \frac{|W|}{1000} = \frac{23 \times 10^4}{1000} = 230 \text{ s}$$

۵۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

* در هر دو فرآیند دما زیاد شده و انرژی درونی زیاد شده است. $(P_B > P_A, V_B > V_A, PV = nRT)$

* در هر دو فرآیند گاز روی محیط کار انجام می‌دهد، یعنی $W < 0$ (چون هر دو فرآیند انبساط هستند).

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q \text{ در هر دو فرآیند مثبت است.}$$

ΔU به مسیر فرآیند بستگی ندارد، یعنی ΔU دو فرآیند برابر است.

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_1 = \Delta U_2 \Rightarrow W_1 + Q_1 &= W_2 + Q_2 \\ |W| = S, S_2 > S_1 \Rightarrow |W_2| > |W_1| \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_1 < Q_2$$

۵۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. وقتی کلید باز است، اختلاف پتانسیل دو سر مدار (V) بین خازن C_1 و معادل خازنهای C_2 و C_3 و C_4 به نسبت عکس ظرفیت تقسیم می‌شود. وقتی کلید بسته می‌شود، خازن C_3 از مدار حذف می‌شود و ولتاژ V بین خازن C_1 و معادل C_2 و C_4 به نسبت عکس ظرفیت تقسیم می‌شود. (در خازنهای سری ولتاژ کل بین دو خازن به نسبت عکس ظرفیت تقسیم می‌شود).

$$C_{2,3} = \frac{2C \times 2C}{2C + 2C} = C, \quad C' = C + C = 2C \Rightarrow V = V_1 + V', \quad q_1 = q' \Rightarrow$$

$$CV_1 = 2CV' \Rightarrow V_1 = \frac{2V}{3} \Rightarrow U'_1 = \frac{1}{2} C \times \left(\frac{2V}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{U'_1}{U_1} = \left(\frac{\frac{2}{3}V}{V}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

۵۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U = -W \\ \text{میدان} \\ V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} \end{array} \right\} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{-\Delta U}{q} = \frac{W}{q} = \frac{+2 \times 10^{-3}}{-20 \times 10^{-6}} = -100 \text{ V}$$

۵۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{ماشین کارنو: } \frac{|Q_C|}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{T_C}{T_C + 600} \Rightarrow T_C = 300 \text{ K} = 27^\circ \text{ C}$$

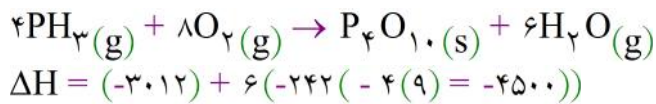
۵۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیروی وزن این ذره را به طرف پایین می‌کشند و میدان الکتریکی آنرا به طرف بالا می‌راند (چون شتاب سقوط کم‌تر از g است) و چون بار منفی است، جهت نیروی وارد بر آن مخالف \vec{E} است؛ پس جهت میدان به طرف پایین است.

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - E|q| = ma \Rightarrow 20 \times 10^{-3} \times 10 - 10 \times 10^{-9} E = 20 \times 10^{-3} \times 6 \Rightarrow 0.2 - 10^{-8} E = 0.12 \Rightarrow 0.08 = 10^{-8} E \Rightarrow E = 8 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 8 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

۶۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{12 \times 15}{3^2} = 20 \Rightarrow F' = 20F$$

ضمناً q_1 و q_2 یکدیگر را جذب می‌کنند، پس q_1 و q_2 ناهم‌نام هستند، پس q_1^{-12} و q_2^{15} هم‌نامند و یکدیگر را دفع می‌کنند.



۶۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۶۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

ظرفیت گرمایی ویژه \times جرم مولی = ظرفیت گرمایی مولی

$$\frac{12c(\text{H}_2\text{O}(\text{g}))}{32c(\text{O}_2(\text{g}))} = 0.3 \Rightarrow \frac{c(\text{گرافیت})}{c(\text{O}_2(\text{g}))} = \frac{0.3 \times 32}{12} = 0.8$$

۶۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در واکنش‌های سوختن علامت w متفاوت است. به‌طور مثال در سوختن اتان $w < 0$ و در سوختن اتن $w = 0$ و در سوختن اتین $w > 0$ است (با فرض گازی بودن H_2O).

۶۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با وجود آن‌که در سامانه‌ی فشار ثابت $\Delta H = q$ می‌باشد، اما ΔH مانند ΔE و بر خلاف q و w تابع حالت می‌باشد.

۶۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گرمای آزاد شده به‌ازای تولید یک مول CO_2 در سوختن متان

$$\uparrow$$

$$890 - \frac{1560}{2} = 110 \text{ kJ}$$

$$\downarrow$$

گرمای آزاد شده به‌ازای تولید یک مول CO_2 در سوختن اتان

۶۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای اجسام مختلف به‌طور کلی ظرفیت گرمایی در حالت مایع «جامد» گاز است.

۶۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. واکنش اول را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم، واکنش سوم را برعکس کرده و در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم. واکنش دوم را نیز جهت حذف O_2 از طرفین، برعکس کرده و در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{1}{3}(-317/5 + 242 + 149) = +24/5 \text{ kJ}$$

۶۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها به‌ترتیب:

- ظرفیت گرمایی به جرم و ظرفیت گرمایی ویژه جسم بستگی دارد، اما ظرفیت گرمایی مولی به جرم مولی و ظرفیت گرمایی ویژه بستگی دارد.
- ظرفیت گرمایی کمیتهی مقداری است و به جرم ماده بستگی دارد.
- انرژی گرمایی تابع دما نیز هست، بنابراین عبارت سوم نمی‌تواند همواره درست باشد.
- انرژی گرمایی تابع مقدار نیز هست و تنها با دما نمی‌توان آن را مقایسه نمود.

۶۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

- در واکنش (I)، $\Delta H > 0$ و $\Delta S > 0$ در دمای بالا خودبه‌خودی است.
در واکنش (II)، $\Delta H < 0$ و $\Delta S < 0$ در دمای پایین خودبه‌خودی است.
در واکنش (III)، $\Delta H < 0$ و $\Delta S > 0$ در هر شرایطی خودبه‌خودی است.
در واکنش (IV)، $\Delta H > 0$ و $\Delta S > 0$ در دمای بالا خودبه‌خودی است.

۷۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اختلاف ΔH_1 و ΔH_2 گرمای لازم برای تبخیر ۴ مول آب است.

$$4 \times 18 \text{ g} \quad \text{یا} \quad 4 \text{ mol آب} \quad (2220 - 2056) \text{ KJ} \quad \Rightarrow \quad x = 20/5 \text{ KJ}$$

۹ x